PHYSIKALISCHE ZEITSCHRIFT

No. 3. 1. Februar 1910. Redaktionsschluß für No. 4 am 7. Februar 1910. 11. Jahrgang.

INHALT:

Friedrich Kohlrausch †. S. 73.

Originalmitteilungen:

M. Wien, Über eine neue Form der Stoßerregung elektrischer Schwingungen. S. 76.

J. Zeleny u. L. W. Mc Keehan, Die Endgeschwindigkeit des Falles kleiner Kugeln in Luft. S. 78.

V. Variĉak, Anwendung der Lobatscheskijschen Geometrie in der Relativtheorie. S. 93.

H. Bateman, Die Lösung der Integralgleichung, welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Erdbebenwelle im Innern der Erde mit den Zeiten verbindet, die die Störung gebraucht, um zu verschiedenen Stationen auf der Erdoberfläche zu gelangen. S. 96.

A. Sommerfeld, Über die Verteilung der Intensität bei der Emission von Röntgenstrahlen. S. 99.

W. Wilson, Über das Absorptionsgesetz der β-Strahlung. S. 101.

Berichtigung. S. 104.

Tagesereignisse. S. 104.

Personalien. S. 104.

Friedrich Kohlrausch †.

Nachruf von Eduard Riecke.

In dem Vorworte zur 11. Auflage seines Lehrbuches hat Friedrich Kohlrausch geäußert, daß für ihn die Zeit gekommen sein dürfte, von der Arbeit, die ihn durch 40 Jahre seines Lebens begleitet habe, Abschied zu nehmen; denn jeder müsse mit dem Geschicke rechnen, daß die Kräfte für die gewohnte, aber von Jahr zu Jahr sich mehrende Arbeit nicht mehr ausreichen. Früher und in anderem Sinne, als er selber und wir alle gedacht, hat sich dieses Wort erfüllt. Am 18. Januar ist Friedrich Kohlrausch unerwartet durch einen Herzschlag dahingerafft worden.

Kohlrausch war geboren in Rinteln am 14. Oktober 1840, als Sohn des verdienstvollen Physikers Rudolf Kohlrausch, der damals Gymnasiallehrer in Rinteln war. Im Jahre 1857 kam der Vater, der zuletzt in Marburg neben dem Schulamte noch die Stelle eines außerordentlichen Professors an der dortigen Universität bekleidet hatte, als ordentlicher Professor der Physik nach Erlangen. Aber schon im folgenden Jahre verlor Kohlrausch den Vater; sein Leben lang hat er ihm eine treue kindliche Pietät bewahrt, er ist für sein Andenken eingetreten, wo immer die Verdienste Rudolf Kohlrauschs nicht die ihnen gebührende Würdigung fanden. Seine Studienzeit hat Kohlrausch teils in Erlangen, teils in Göttingen verlebt. Er war dann eine Zeitlang Assistent an der Göttinger Sternwarte. So fand er auf dem klassischen Boden exakter Messungen Gelegenheit, die natürliche, nach eben jener Seite gerichtete Anlage zu vertiefen, Erfahrungen zu sammeln, die seinem späteren Lebenswerke zugute kamen. Von Göttingen kam Kohlrausch zunächst nach Frankfurt als Dozent des Physikalischen Vereins. Was sich dort dem jungen Physiker an experimentellen Einrichtungen darbot, hat er später in launiger Weise geschildert. Er hat aber auch hervorgehoben, wie nützlich es für ihn war, daß er gezwungen wurde, sich so viele Hilfsmittel mit eigner Hand zu schaffen, die man in einem modernen physikalischen Institute so selbstverständlich hinnimmt wie das tägliche Brot. Von Frankfurt kam Kohlrausch als außerordentlicher Professor und Assistent Wilhelm Webers nach Göttingen. Die Räume und Einrichtungen des Göttinger Institutes waren bescheiden genug; aber Weber hatte durch seine wissenschaftliche Tätigkeit eine Reihe von Einrichtungen und Instrumenten geschaffen, die an anderen Orten nicht zu finden waren. Das von Weber stammende Kapital hat in den vier Jahren, welche Kohlrausch in Göttingen weilte, reiche Zinsen getragen. Er hat Untersuchungen, die schon von Weber begonnen waren, weiter geführt, er hat aber auch mit den vorhandenen Hilfsmitteln ganz neue Probleme in Angriff genommen. Die Göttinger Jahre sind für Kohlrausch von großer Bedeutung geworden; für die größere Zahl der Arbeiten, die ihn sein späteres Leben hindurch begleitet haben, wurde hier der Grund gelegt. In Kohlrauschs Natur lag es nicht, mit raschem Impulse von einem Probleme zum anderen zu eilen; mit seiner bedächtigen, niedersächsischen Art kehrte er zu dem einmal ergriffenen Problem immer wieder zurück, um den Ergebnissen seiner Forschung eine immer größere Klarheit und Sicherheit zu geben. Die in Göttingen begonnenen Arbeiten über elastische Nachwirkung, Leitvermögen der Elektrolyte, absolute Widerstandsmessung, elektrochemisches Äquivalent haben ihn zum Teil sein Leben lang beschäftigt, wenn auch Jahre vergehen konnten, in denen nicht davon die Rede war. Als ich Ostern 1869 nach Göttingen kam in der Absicht, bei Clebsch mathematische Studien zu treiben, hatte Kohlrausch die Arbeit über das Ohmsche Gesetz bei der elektro-

lytischen Leitung eben beendigt; ich habe noch die umständlichen, schwer zu handhabenden Versuchseinrichtungen kennen gelernt, deren sich Kohlrausch bei dieser ersten Anwendung des Wechselstromes zur Bestimmung elektrolytischer Leitungsfähigkeiten bediente. Die Wechselströme wurden mit der von Weber konstruierten Induktionssirene erzeugt; diese wurde angetrieben mit einem Blasebalg, die Konstanz der Tonhöhe durch Vergleichung mit einem Pfeifentone kontrolliert. Zur Strommessung diente eines der Dynamometer, das von Weber in der noch gemeinsam mit Rudolf Kohlrausch begonnenen Arbeit über elektrische Schwingungen benützt worden war. Eine Widerstandsbestimmung eines Elektrolyten mit Induktor und Telephon ist jetzt eine elementare Aufgabe, die jeder Praktikant in unseren physikalischen Übungen ausführt. Die Arbeit langer Jahre, eine Erfahrung, wie sie eben nur eine beinahe ununterbrochene Beschäftigung mit dem Gegenstande verleiht, war nötig, bis Kohlrausch seiner Methode ihre heutige Eleganz und Einfachheit verleihen konnte.

In dem ersten Semester, daß ich in Göttingen zubrachte, behandelte Kohlrausch in einer Seminarstunde die Gaußsche Methode zur Bestimmung der horizontalen Intensität des Erdmagnetismus. Die im Gauß-Weberschen erdmagnetischen Observatorium angestellten Übungen bildeten für Kohlrausch selber die Vorbereitung zu einer im Sommer 1869 von ihm mit größter Sorgfalt ausgeführten Bestimmung der horizontalen Intensität. Die mühevolle Arbeit wurde von ihm vermutlich unternommen im Hinblick auf eine andere Aufgabe, mit der sich Kohlrausch zuerst in Göttingen beschäftigt hat; es war eine Wiederholung der absoluten Widerstandsmessung nach der Methode und mit den Apparaten Webers, und eine Bestimmung des Widerstandes der Quecksilbereinheit in absolutem Maße. Das Resultat der Untersuchung von Kohlrausch wich von den beinahe gleichzeitigen Bestimmungen, die in England auf Veranlassung der British Association ausgeführt worden waren, ab. Es stellte sich später heraus, daß ein Teil der Differenz durch einen Fehler in dem Wert der Induktorfläche verschuldet war, den Kohlrausch von Weber übernommen hatte. Aber gerade der Umstand, daß so sorgfältige und genaue Messungen zu verschiedenen Werten geführt hatten, übte auf die Untersuchungen selber einen mächtigen Impuls aus; das Problem verschwand nicht mehr von der Tagesordnung, bis eine vollkommene Übereinstimmung der von verschiedenen Seiten und nach verschiedenen Methoden ausgeführten Bestimmungen erreicht war. An der Vollendung der Aufgabe hat Kohlrausch unermüdlich mitgearbeitet noch zu einer Zeit, als, wie er meinte, mit einer absoluten Widerstandsmessung keine Lorbeeren mehr zu verdienen waren. An dem großen Fortschritt, den jene Untersuchungen der experimentellen Technik gebracht haben, hat Kohlrausch seinen vollen Anteil.

Noch fällt in Kohlrauschs Göttinger Zeit eine Bestimmung des elektrochemischen Äquivalents des Silbers. Auf die fundamentale Frage, ob das elektrochemische Äquivalent eine absolut unveränderliche Größe, oder ob es beeinflußt durch die äußeren Verhältnisse sei, ist Kohlrausch in der letzten Periode seines Lebens, in der Muße seines Marburger Aufenthaltes, zurückgekommen. Seine letzte Arbeit galt ihrer experimentellen Prüfung. Jene erste Bestimmung des Äquivalentes wurde wieder in dem erdmagnetischen Observatorium ausgeführt, das damals für solche Untersuchungen die denkbar günstigsten Verhältnisse bot. Zur Strommessung diente eine neue von Kohlrausch konstruierte Tangentenbussole, sie war ursprünglich dazu bestimmt, in Verbindung mit einem Bifilargalvanometer die horizontale Intensität des Erdmagnetismus durch rein galvanische Messungen zu ermitteln.

Im Herbst 1870 folgte Kohlrausch einem Rufe an das Polytechnikum Zürich. Er hat sich dort nicht wohl gefühlt; dazu mögen die politischen Verhältnisse beigetragen haben. Stand doch die Masse des schweizerischen Volkes dem Erwachen Deutschlands mit unverholenem Mißbehagen gegenüber. Kohlrausch folgte daher im Herbst 1871 gerne einem Rufe an die Technische Hochschule Darmstadt. In der Züricher Zeit unternahm Kohlrausch einen Vorstoß in das Gebiet der Thermoelektrizität; angeregt durch eine Mitteilung des Physiologen Hermann entwickelte er die Vorstellung, daß Erscheinungen der Thermoelektrizität bedingt seien dadurch, daß jeder elektrische Strom einen Wärmestrom, jeder Wärmestrom einen elektrischen Strom mit sich führe. Kohlrausch selber hat seine Theorie nicht weiter verfolgt. Andere sind später von anderen Gesichtspunkten aus darauf zurückgekommen.

In Darmstadt blieb Kohlrausch bis zum Jahre 1875, kam von dort als Nachfolger Kundts nach Würzburg, um diesen auch in Straßburg wieder zu ersetzen, nach dem Kundt die Berliner Professur übernommen hatte. Nach dem Tode von Helmholtz übernahm Kohlrausch im Jahre 1895 die Präsidentschaft der Physikalisch-technischen Reichsanstalt. Im Lauf dieser Jahre vollendete sich der Kreis der Untersuchungen, die man, gewiß auch in seinem

eigenen Sinne, als das wissenschaftliche Hauptwerk seines Lebens bezeichnen darf, der monumentale Bau, den er durch seine Arbeiten über das Leitvermögen der Elektrolyte geschaffen hat. Kohlrausch hat in dem Briefe an Nernst, in dem er seinem Danke für die Verleihung der Bunsenmedaille Ausdruck gegeben hat, in unübertrefflicher Weise geschildert, wie seine Arbeit von den anfänglichen, schwierig zu handhabenden Versuchsanordnungen aus zu immer größerer Einfachheit und Genauigkeit fortgeschritten ist. Der erste Schritt in der experimentellen Anordnung bestand in dem Ersatze der Induktionssirene durch den von Kohlrausch konstruierten Rotationsinduktor. Die spätere Erfahrung zeigte, daß auch der Induktor mit Wagnerschem Hammer bei den Messungen zu gebrauchen war. Immer aber wurde zur Strommessung noch das Dynamometer benutzt, dessen Ablenkungen mit Spiegel und Skala zu beobachten waren; noch in der Darmstädter Zeit klagte Kohlrausch über die Schwierigkeiten, die das Dynamometer gelegentlich bereitete. Den größten Fortschritt der experimentellen Methode bedeutete daher die Einführung des Telephons zur Beobachtung der Wechselströme.

Es liegt in der Natur der Sache, daß Kohlrausch den größten Teil der Jahre, die er der Untersuchung der elektrolytischen Leitung gewidmet hat, auf die Beschaffung eines Beobachtungsmaterials verwandte; wie es in solcher Vollkommenheit und in so reicher Fülle nur selten von einem einzelnen Forscher gesammelt worden ist. Der Erfolg hat aber die mühevolle Arbeit reich gelohnt. Ihre erste Frucht war das Gesetz von der unabhängigen Wanderung der Ionen, durch das die ganze Mannigfaltigkeit der Erscheinungen in so einfacher und durchsichtiger Weise dargestellt werden konnte.

Die Untersuchung des Leitvermögens der Elektrolyte mußte von selber auf die Frage nach der Leitung des Wassers führen. War diese nur die Folge von Verunreinigungen oder haftete sie dem Wasser als solchem an? Dem experimentellen Geschick, der hohen Kunst genauester Beobachtung, die Kohlrausch in unermüdlicher Arbeit sich zu eigen gemacht hatte, gelang die Entscheidung der Frage, deren Schwierigkeiten wohl die meisten Beobachter zurückgeschreckt hätten. Der von Kohlrausch aus seinen Beobachtungen berechnete Dissoziationsgrad des Wassers stimmte aufs beste überein mit dem aus der Hydrolyse und aus der elektromotorischen Kraft der Wasserstoffkonzentrationskette folgenden.

In der Berliner Zeit war das wissenschaftliche Interesse Kohlrauschs wohl in erster Linie der merkwürdigen Beziehung zugewandt, welche den Temperaturkoeffizienten des Leitvermögens mit der Wanderungsgeschwindigkeit der Ionen verbindet. Eine theoretische Deutung der Tatsache, daß der größeren Wanderungsgeschwindigkeit der kleinere Temperaturkoeffizient entspricht, besitzen wir zurzeit noch nicht. Kohlrausch selber war überzeugt, daß die von ihm ermittelten empirischen Gesetze bei ihrer weiteren Verfolgung einen Weg eröffnen würden zu tieferem Verständnis des elektrolytischen Widerstandes und des Wesens der Lösungen überhaupt.

Näher auf die Arbeiten Kohlrauschs auf den Gebieten des Erdmagnetismus, der Elastizität, der Wärme- und Elektrizitätsleitung, der Kapillarität einzugehen, muß ich mir versagen. Dagegen darf ich nicht unterlassen, auf die konstruktive Tätigkeit hinzuweisen, die Kohlrausch meist im Zusammenhange mit seinen wissenschaftlichen Arbeiten ausgeübt hat. Wir verdanken ihm nicht bloß auf dem Gebiete der Elektrolyse neue experimentelle Einrichtungen. Die Idee zu dem so viel gebrauchten Totalreflektometer stammt noch aus der Göttinger Zeit, und erhielt ihre erste Ausgestaltung in Zürich. In Würzburg waren es vor allem die Gebiete des Magnetismus und der Galvanometrie, welche er durch die Konstruktion von Apparaten bereichert hat. Er hatte dort in Eugen Hartmann einen Mechaniker gefunden, der mit Verständnis und Geschick auf seine Ideen einging. Kohlrausch stellte sich aber auch selber gerne an die Drehbank, und noch in der Präsidentenwohnung in Charlottenburg fand diese ihre Stelle.

In diesem Zusammenhange möge auch des neuen Institutes gedacht werden, das Kohlrausch in Würzburg eingerichtet hat. Der Bau fiel in die Zeit, da der Aufschwung der physikalischen Studien, der nicht zum wenigsten der Rückwirkung der Technik zu verdanken war, eben begonnen hatte. Der beste Beweis für die Umsicht, mit der Kohlrausch den Bau und die Einrichtung des Instituts geleitet hat, liegt in der Tatsache, daß das Institut den gesteigerten Ansprüchen, welche die folgenden Jahrzehnte an ein physikalisches Institut stellten, bis auf den heutigen Tag gewachsen blieb.

Kohlrausch war nicht bloß der Mann der wissenschaftlichen Forschung, er war ein Lehrer, und ein Lehrer großen Stiles, dessen Wirkung weit hinaus ging über den Kreis derer, die als Hörer vor ihm auf den Bänken saßen oder in seinem Laboratorium arbeiteten. Physikalische Übungen gab es auch vor Kohlrausch, aber es fehlte an einem konsequenten Lehrgange; man pflegte Handfertigkeitsübungen zu verbinden mit Beobachtungen, die nach ziemlich subjektiven Rücksichten ausgewählt wurden; dazu kamen

wohl noch Vorlesungsversuche, welche die Praktikanten mit mehr oder weniger Erfolg wiederholten. Eine systematische Ausgestaltung der Übungen war ein Erfordernis der Zeit; sie würde sich vollzogen haben auch ohne Kohlrausch. So wie sie gekommen ist, trägt sie aber den Stempel, den er ihr aufgedrückt hat. Wir können damit wohl zufrieden sein: der Sohn und Enkel eines Schulmannes besaß den zur Lösung der Aufgabe nötigen pädagogischen Takt. Er verstand es, in einem das ganze Gebiet umfassenden Lehrgange die Schüler zu genauer Beobachtung zu erziehen, sie mit Vertrauen zu den Methoden und den damit erhaltenen Resultaten zu erfüllen, ihnen Achtung beizubringen vor der Macht der Zahlen, denen jede Theorie sich beugen muß. Der Leitfaden der praktischen Physik, in seiner ersten Auflage lediglich zum Gebrauch in dem Göttinger Praktikum bestimmt, wuchs freilich bald über den Rahmen eines elementaren Übungsbuches hinaus. Als Lehrbuch der praktischen Physik bildet er weit über die Grenzen Deutschlands hinaus den Führer und Berater jedes wissenschaftlich arbeitenden Physikers. Aus dem die Gesamtheit der wissenschaftlichen Methoden, eine unerschöpfliche Menge einzelner Erfahrungen umschließenden Lehrbuche hat sich aber auch der bescheideneren Zielen dienende Leitfaden in einem an seine ursprüngliche Gestalt erinnernden Umfang wieder herausgeschält.

Im Rückblick auf ein wohlangewandtes, an Arbeit und Erfolgen reiches Leben konnte Kohlrausch im Jahre 1905 von der Präsidentschaft der Reichsanstalt zurücktreten. Noch fünf Jahre eines behaglichen Alters hat er in Marburg und in Jugenheim an der Bergstraße, dem Sommersitze seiner Familie, zugebracht. War es im eigenen Hause auch still geworden — nur eine Tochter weilte noch bei den Eltern —, so sorgten die Familien des Sohnes und dreier Töchter für Freude und Leben. Daß die Muße der Marburger Tage dem Unermüdlichen nur ein Sporn war, um mit neuem Eifer und neuer Kraft den Arbeiten seines Lebens sich zuzuwenden, davon zeugen vor allem die Abhandlungen über das elektrochemische Äquivalent und die neue Auflage seines Lehrbuches. Die Erinnerung an Kohlrausch wird dauern, solange es eine physikalische Wissenschaft gibt und solange umfangreiche Zweige der Technik auf ihrer Grundlage ruhen.

ORIGINALMITTEILUNGEN.

Über eine neue Form der Stoßerregung elektrischer Schwingungen.

(Vorläufige Mitteilung.)

Von Max Wien.

Die Möglichkeit der „Stoßerregung" elektrischer Schwingungen wurde zuerst bei ganz kurzen Funkenstrecken im Stoßkreise nachgewiesen. Bekanntlich hat hierauf die Gesellschaft für drahtlose Telegraphie ihr System der „tönenden Funken" begründet und durch sorgfältige Durchkonstruktion solcher Funkenstrecken eine für die Praxis genügende Konstanz, durch Vermehrung der Funkenzahl und Hintereinanderschalten mehrerer Funkenstrecken große Energiemengen erzielt.

Später fand sich, daß auch bei langen Funkenstrecken und dementsprechend hohen Funkenpotentialen eine Stoßerregung mit gutem Nutzeffekt möglich ist, nur muß die Koppelung zwischen Stoßkreis und Schwingungskreis dabei viel loser sein.

Die Grundbedingung „reiner" Stoßerregung, daß das Dekrement des Stoßkreises groß ist gegen das des Schwingungskreises, ist bei sehr kurzen Funken meist ohne weiteres wegen des hohen Dekrements kurzer Funken erfüllt. Anders bei langen Funkenstrecken, deren Dekrement sehr klein sein kann. Hier muß, um obige Bedingung zu erfüllen, bei stärker gedämpftem Schwingungskreis Ballastwiderstand in den Stoßkreis eingeschaltet werden. Dadurch wird aber der Nutzeffekt in steigendem Maße verringert.

Versuche mit Geißlerschen Röhren, an Stelle der gewöhnlichen Funkenstrecke, ergaben wohl gute Löschwirkung, es ist aber schwierig, dabei gleichzeitig hohe und konstante Spannungen zu erzielen. Diese Schwierigkeit kann man nun umgehen, indem man die Geißlersche Röhre nicht als Funkenstrecke benutzt, sondern sie nur als „Löschwiderstand" in den Stromkreis einschaltet, die Potentialdifferenz aber durch eine gewöhnliche Luftfunkenstrecke erzeugt (Fig. 1). Die kleineren Schwankungen des an sich niedrigen Entladungspotentials der Röhre kommen neben dem hohen Funkenpotential der Luftfunkenstrecke nicht in Betracht, so daß man so im Stoßkreis beliebig hohe und dabei konstante Spannungen verwenden kann. Andererseits bewirkt die ausgezeichnete Lösch-

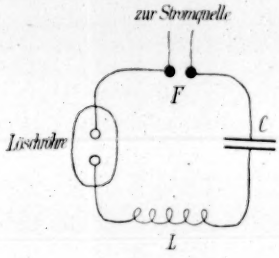


Fig. 1.

wirkung der Geißlerschen Röhren, daß ein besserer Nutzeffekt bei engerer Koppelung erreicht wird und auch bei stark gedämpftem Schwingungskreis ohne besonderen Ballastwiderstand reine Stoßerregung erzielt werden kann.

Form der Löschröhre. Jede Geißlersche Röhre von einigermaßen passendem Druck zeigt diese Wirkung. Der Druck kann in weiten Grenzen variiert werden, am besten liegt er etwa zwischen 0,5 und 0,1 mm Hg. Ist der Druck zu klein, so wird die Löschwirkung unregelmäßig, ist er zu groß, so sinkt der Nutzeffekt, indem gleichzeitig die Grenzkoppelung der Löschwirkung eine losere wird. Füllung mit verschiedenen Gasen — Sauerstoff, Stickstoff, Wasserstoff — ergab keine merklichen Unterschiede, Quecksilberdampf wurde bisher noch nicht untersucht. Den besten Nutzeffekt erhielt ich mit weiten Röhren, in denen sich zwei Aluminiumelektroden in 2—3 cm Entfernung gegenüberstanden (vergl. Fig. 1 oder eine Flüssigkeitskühlung ermöglichende Form in Fig. 2). Bei so kurzem Abstand der Elektroden ist jedoch die Löschwirkung nicht immer konstant und setzt öfter bei einzelnen Funken aus, vor allem bei stärkeren Entladungen und wenn die Abstimmung zwischen Stoß- und Schwingungskreis nicht gut ist. Um eine größere Regelmäßigkeit der Entladung und damit der Löschwirkung zu erzielen, ist es daher besonders für Meßzwecke vorzuziehen, den Entladungsweg etwas länger und enger zu

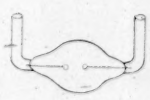


Fig. 2.

Fig. 3.

machen, so daß die Röhren dann etwa die Form eines Kohlrauschschen Widerstandsgefäßes erhalten (Fig. 3). Oft ist auch eine Kombination von zwei oder mehreren Röhren geeignet. Macht man den Röhrenquerschnitt sehr klein, wie bei den üblichen kapillaren Spektralröhren, so erhitzt die Röhre sich stark und der Nutzeffekt sinkt erheblich. Für schwächere Entladungen sind aber auch derartige Röhren noch brauchbar.

Koppelungsgrad. Wie immer bei Stoßerregung, wird bei zu enger Koppelung die Löschwirkung unregelmäßig, bei zu loser Koppelung sinkt die Energieübertragung. Es ist bei dieser Art der Stoßerregung bequem, daß bei geeigneten Löschröhren die Grenzen der Koppelung recht weit auseinanderliegen und dazwischen in einem verhältnismäßig großen Gebiet die auf den Schwingungskreis und den Empfangskreis übertragene Energie sich nur wenig ändert; so erhielt ich in einem Fall bei Änderung des Koppelungsgrades zwischen 12 und 6 Proz. nur eine Verminderung der übertragenen Energie um etwa 10 Proz. gegenüber dem Maximum. Die im Empfangskreise aufgenommene Resonanzkurve war innerhalb dieser Grenzen merklich die gleiche und entsprach dem Dekrement des Schwingungskreises, so daß die Stoßerregung als „rein" anzusehen ist, bis ein Versagen der Löschwirkung bei zu enger Koppelung eintritt. Wo diese Grenze liegt, hängt von den Konstanten des Stromkreises und von der Zahl und Art der Löschröhren ab.

Nutzeffekt. Um die Anwendbarkeit der Methode zu prüfen, wurden die Verhältnisse der Stromkreise in weiten Grenzen variiert: so die Entladungsspannung zwischen 10000 und 100000 Volt, die Kapazität zwischen 500 und 10000 cm, die Funkenzahl bis zu über Hundert in der Sekunde, die Leistung bis zu 200 Watt im Schwingungskreis. Die Größenordnung des Nutzeffektes blieb dabei ungefähr die gleiche: man erreicht bei Verwendung der Röhrenform der Fig. 3 leicht einen Nutzeffekt von 50—60 Proz.; bei der Form der Fig. 2 kommt man unter günstigen Umständen noch wesentlich höher. Der Nutzeffekt sinkt naturgemäß, wenn im Stoßkreis Ballastwiderstand eingeschaltet wird, oder im Kondensator durch Leitung, dielektrische Hysterese, Sprühen usw. Energieverluste entstehen. Jedoch sind wegen des schnellen Erlöschens der Schwingungen im Stoßkreis alle diese Verluste verhältnismäßig klein. Ebenso ist die Erwärmung der Löschröhren verhältnismäßig klein, da die geringe dem Stoßkreis verbleibende Energie sich auf die verschiedenen Teile des Kreises — Funken, Strombahn und schließlich die Löschröhren — verteilt.

Physik. Inst. d. Techn. Hochschule Danzig.
11. 1. 1910.

(Eingegangen 11. Januar 1910.)

Die Endgeschwindigkeit des Falles kleiner Kugeln in Luft.
(The Terminal Velocity of Fall of Small Spheres in Air.)

Von John Zeleny und L. W. Mc Keehan.

§ 1. Einleitung.

Der Widerstand, den ein Fluidum einem Körper entgegensetzt, der sich durch dasselbe hindurchbewegt, wächst mit der Geschwindigkeit. Die Geschwindigkeit eines durch ein Fluidum frei fallenden Körpers erreicht einen Grenzwert, wenn der Widerstand gegen die Bewegung dem resultierenden Gewichte des Körpers gleich wird; diesen Grenzwert der Geschwindigkeit nennt man die Endgeschwindigkeit des Falles.

Für den Widerstand, den ein kugelförmiger Körper erleidet, wenn alle übrigen Widerstände im Vergleich zu dem von der inneren Reibung des Fluidums herrührenden zu vernachlässigen sind, und wenn man annimmt, daß an der Grenzfläche kein Gleiten auftritt, für diesen Widerstand hat Stokes[1]) den Ausdruck $6\pi\mu a V$ erhalten. In diesem Ausdruck ist μ der Koeffizient der inneren Reibung des Fluidums, a der Halbmesser der Kugel und V ihre Geschwindigkeit in dem Fluidum. Die Endgeschwindigkeit einer frei fallenden Kugel, die man erhält, wenn man den vorstehenden Wert für den Widerstand dem resultierenden Gewichte der Kugel gleichsetzt, ist

$$V = \frac{2}{9}\,\frac{g a^2 (\sigma - \varrho)}{\mu},$$

wo σ die Dichtigkeit der Kugel und ϱ die Dichtigkeit des Fluidums ist. Dadurch, daß wir alle Widerstände, mit Ausnahme jenes der inneren Reibung, ausschließen, wird die Anwendbarkeit der Formel auf ganz winzige Kugeln beschränkt, denn die Bedingung, die für ihre Gültigkeit erfüllt sein muß, ist, daß der Halbmesser der Kugel gegenüber $\frac{\mu}{V \cdot \varrho}$ klein sein muß.

In den letzten Jahren ist die Formel von Stokes bei wichtigen Messungen zur Bestimmung der Größe winziger Kugeln auf Grund ihrer Fallgeschwindigkeit in Luft benutzt worden. Der Zweck der hier zu schildernden Versuche besteht nun darin, die Gültigkeit der Formel für den Fall nachzuprüfen, daß Luft das Fluidum bildet. Diese Prüfung erfordert die Messung des Halbmessers, der Dichtigkeit und der Endgeschwindigkeit der dabei benutzten Kugeln, denn die Dichtigkeit und die innere Reibung der Luft sind bekannt. Aus der Notwendigkeit, Kugeln von mikroskopischer Größe zu verwenden, entspringen die Hauptschwierigkeiten der Versuche. Die erste dieser Schwierigkeiten besteht darin, Kugeln zu erhalten, die für den Zweck genügend klein sind.

[1]) G. G. Stokes, Mathematical and Physical Papers 3, 59.

§ 2. Versuche mit Sporen.

Die mikroskopischen Sporen, die von gewissen Pflanzen hervorgebracht werden, sind bei manchen Arten ganz kugelförmig; wir haben sie deshalb als geeignet zur Prüfung der Stokesschen Formel gewählt. Die Auswahl ist indessen auf solche Sporen begrenzt, die sich nicht nur in ihrer Gestalt der Kugelform nähern, sondern die auch in genügender Menge frei von anderem Material zu erhalten sind, um eine genaue Dichtigkeitsbestimmung zu gestatten. Wir haben die Sporen folgender drei Arten ausgewählt: Lycopodium, Lycoperdon und Polytrichum.

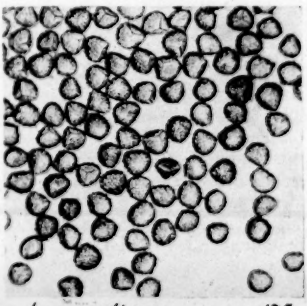


Fig. 1.

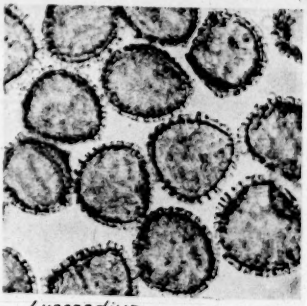


Fig. 2.

Zuerst haben wir Lycopodium benutzt, weil es sich als käufliches Pulver sehr rein von fremdem Material erhalten läßt. Die einzelnen

Sporen sind nur in roher Annäherung kugelförmig. Ihre Gestalt ist in den Mikrophotogrammen[1]) (Fig. 1 und 2) wiedergegeben. Fig. 2 läßt erkennen, daß die Außenwandungen der Zellen frei von irgendwelchen haarartigen Vorsprüngen ist.

Sämtliche Lycoperdonsporen, die wir benutzt haben, wurden aus einem großen, gut ausgereiften Flockenstreuling, einem Colorado-Pfuffball, gewonnen. Wir erhielten die Sporen dadurch praktisch frei von Verunreinigungen, daß wir Massen des Flockenstreulings auf einem Zeugsiebe zerrieben. Diese Sporen sind im ganzen recht kugelförmig und gehören zu den kleinsten, die man kennt. Eine Gruppe von ihnen ist in Fig. 3 in 900facher linearer Vergrößerung dargestellt.

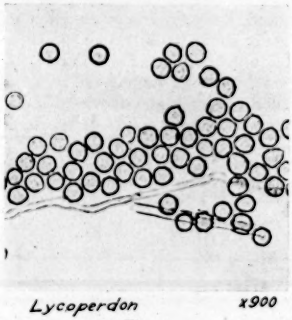


Fig. 3

Die Polytrichumsporen haben wir von einigen frisch gesammelten Pflanzen[2]) gewonnen. Wir trockneten die Farne und sammelten die Sporen in der Weise, daß wir die Kapseln aufschnitten und sie auf ein Sieb ausschütteten. Wie glatt die Wände der Sporen sind, geht aus den Mikrophotogrammen hervor. Die Sporen waren bei ihrer Verwendung nicht vollkommen ausgereift, denn mehrere Monate nach Beendigung der mit ihnen angestellten Versuche waren an einigen von ihnen Gestaltsänderungen zu beobachten.

Wir wollen nun die Frage behandeln, wie genau man mit Hilfe der Stokesschen Formel die Endgeschwindigkeit solcher Teilchen zu berechnen vermag, die einigermaßen von der Kugelgestalt abweichen. Wenn wir annehmen, daß ein solches Teilchen einer Kugel äquivalent sei, deren Durchmesser gleich dem mittleren Durchmesser des Teilchens ist, so kann die berechnete Endgeschwindigkeit aus zwei Gründen fehlerhaft sein: Das berechnete Volumen kann von dem wahren Volumen verschieden sein, und der berechnete Widerstand gegen die Bewegung kann von dem wahren Widerstande verschieden sein. Die Größe dieser Fehler können wir ersehen, wenn wir einen Körper von irgendeiner regelmäßigen, aber nicht kugelförmigen Gestalt betrachten. Als extremen Fall wollen wir ein Ellipsoid[1]) wählen, dessen Halbachsen 4, 5 und 6 sind. Das Volumen der angenommenen äquivalenten Kugel (mit dem Halbmesser 5) ist um 4 v. H. größer als das wahre Volumen. Der Widerstand gegen die Bewegung in Richtung der kürzesten Achse ist dem einer Kugel vom Halbmesser 5,2 statt vom Halbmesser 5 äquivalent, und der Widerstand gegen die Bewegung in Richtung

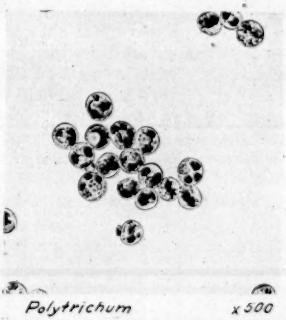


Fig. 4.

der längsten Achse ist gleich dem Widerstande für eine Kugel vom Halbmesser 4,8. Berücksichtigen wir die Fehler, die sich einerseits aus dem Volumen, andererseits aus dem Widerstande gegen die Bewegung ergeben, so ist die Endgeschwindigkeit des Ellipsoids, wie sie sich unter der Annahme berechnet, daß das Ellipsoid einer Kugel mit einem Halbmesser gleich dem Mittel aus den drei Halbachsen äquivalent sei, um 8 v. H. größer als die Geschwindigkeit, die sich für dasselbe Ellipsoid berechnet, wenn es sich in Richtung der kleinsten Achse bewegt, und die gleiche wie die Geschwindigkeit des Ellipsoids, wenn es sich in Richtung seiner größten Achse bewegt. Nun nähert sich die Gestalt der Sporen weit mehr der Kugelform als das angenommene Ellipsoid; der Fehler, den wir dadurch begehen, daß wir sie als Kugeln voraussetzen, kann daher in jedem Falle nur einen kleinen Bruchteil des Fehlers betragen, den wir

1) Sämtliche hier abgebildete Mikrophotogramme hat Herr Professor E. W. D. Holway freundlichst für uns angefertigt.

2) Herr Professor C. O. Rosendahl hat sie liebenswürdigerweise für uns gesammelt.

1) Wegen der anzuwendenden Gleichungen siehe Lamb, Hydrodynamics, S. 534.

bei dem in der Richtung seiner kürzesten Achse sich bewegenden Ellipsoid gefunden haben. Da die Sporen nicht homogen sind, so hängt die Achsenrichtung, in welcher sie fallen, teilweise von der Lage der Ölkügelchen innerhalb ihrer Wandung ab. Die Anordnung einiger dieser Körper ist aus dem Mikrophotogramm des Polytrichum (Fig. 4) ersichtlich. In einer Gruppe von Sporen können somit einige in Richtung der kleinsten und andere in Richtung der größten Achse fallen. Es muß indessen erwähnt werden, daß hier, wie bei der Entwicklung der Stokesschen Formel, das Fehlen einer Wirbelbewegung vorausgesetzt ist.

a) Messung der Größe.

Die Durchmesser der Sporen wurden mit einem Okularmikrometer ausgemessen. Ein Feld von Teilchen wurde durchlaufen, und während sich das Fadenkreuz durch das Feld bewegte, wurde der Durchmesser jedes einzelnen Teilchens in seiner zufälligen Orientierung der Reihe nach bestimmt. Auf diese Weise erhielten wir die Durchmesser von etwa 300 bis 400 Teilchen von jeder Sporenart. Bei den kleinsten Sporen wurde eine mehr als tausendfache lineare Vergrößerung angewandt.

Lycopodium und Lycoperdon wurden in trockenem Zustande ausgemessen. Das letztere und Polytrichum wurden in Milchsäure eingebettet gemessen, um größere Klarheit zu erhalten. Die Ergebnisse, die wir für Lycoperdon nach den beiden Methoden erhielten, stimmten miteinander überein; allerdings scheint aus der Arbeit von Buller[1]) hervorzugehen, daß in einigen derartigen Fällen Größenunterschiede infolge des Einbettens beobachtet worden sind.

Die einzelnen Sporen sind in Größe beträchtlich verschieden, und die Kurve in Fig. 5 zeigt, in welchem Verhältnis die verschiedenen Größen beim Lycoperdon auftreten. Die Anzahl der Teilchen für je 0,00001 cm Änderung des Halbmessers ist als Ordinate der Kurve im Mittelpunkte des angegebenen Gebietes aufgetragen. Die Kurve ähnelt sehr einer Wahrscheinlichkeitskurve. Die entsprechenden Kurven für Lycopodium und für Polytrichum sind der für Lycoperdon ganz ähnlich; die Kurve für Lycopodium ist in der oberen linken Ecke der Figur in verkleinertem Maßstabe gezeichnet.

Für den mittleren Halbmesser der drei Arten von Sporen haben wir folgende Werte erhalten:

1) A. H. R. Buller, Researches on Fungi, 1909. Hierin ist auch ein Bericht über die Versuche des Verfassers, die Fallgeschwindigkeit verschiedener Sporen betreffend, enthalten.

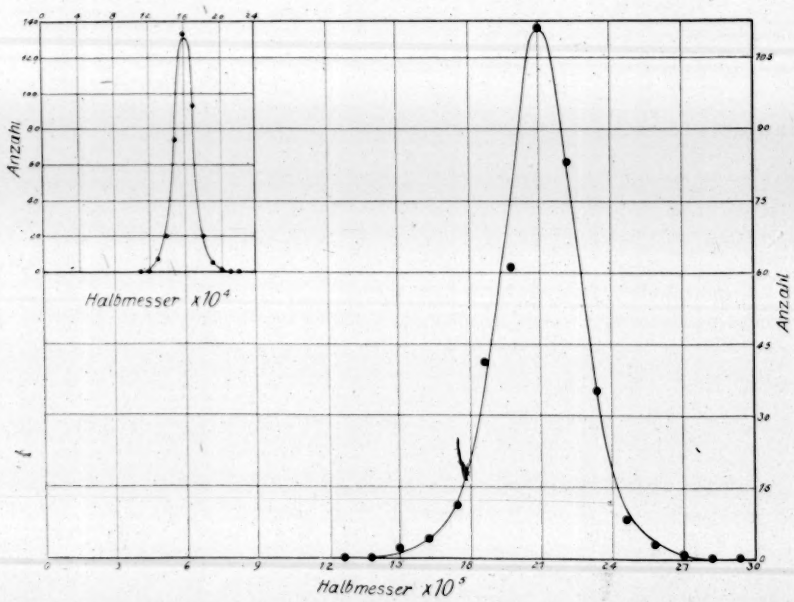


Fig. 5.

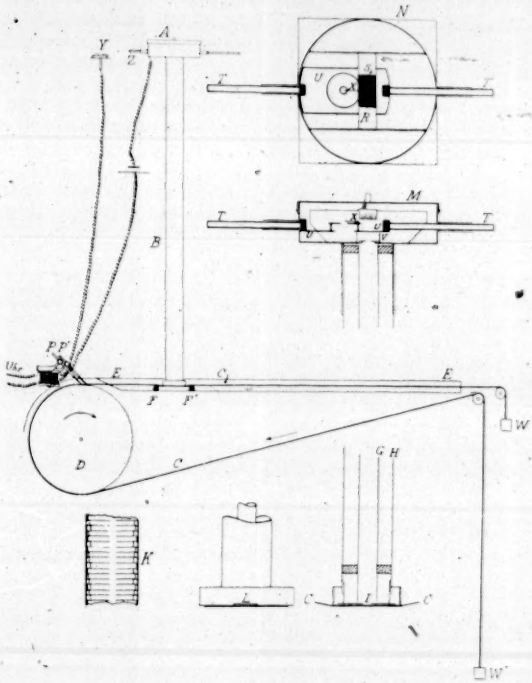


Fig. 6.

Lycopodium	0,001 58 cm,
Polytrichum	0,000478 „ .
Lycoperdon	0,000209 „ .

b) Messung der Dichtigkeit.

Die mittlere Dichtigkeit erhielten wir durch Bestimmung des Volumens einer bekannten Masse der Substanz mittels eines Volumenometers. Wir benutzten anfänglich das Regnaultsche Volumenometer in der üblichen Gestalt; später konstruierten wir jedoch eine verbesserte Form mit einem Baromanometer zur Messung der Drucke, wodurch diese von den Schwankungen der Atmosphäre unabhängig wurden. Dadurch, daß wir dieses Instrument in einem Raum mit konstanter Temperatur benutzten, erhielten wir mit geringerer Mühe Ergebnisse, denen wir weit größeres Vertrauen entgegenbringen konnten[1]). Wir benutzten übrigens bei zwei von den Substanzen beide Instrumente, und die damit gemachten Bestimmungen stimmten gut miteinander überein. Das ausgemessene Volumen der Substanzen schwankte zwischen 3 cm³ und 10 cm³, und wir erhielten folgende Werte für die Dichtigkeit:

Lycopodium	1,175.
Lycoperdon	1,44.
Polytrichum	1,53.

c) Endgeschwindigkeit des Lycopodiums.

Da wir nur die mittlere Dichtigkeit und den mittleren Durchmesser der Sporen bestimmt hatten, mußten wir notwendig auch ihre mittlere Endgeschwindigkeit erhalten. Der Apparat, den wir zu diesem Zwecke beim Lycopodium benutzten, ist in Fig. 6 dargestellt.

Das Lycopodium wurde in dem Kasten A fallen gelassen und fiel nach dem Durchgange durch die Röhre B auf einen bewegten schwarzen Papierstreifen CC. Dieser Papierstreifen wurde durch die Gewichte WW straff gespannt und durch die Chronographentrommel D gleichförmig bewegt. Auf einer Seite war auf den schwarzen Papierstreifen ein Stück weißes Papier aufgeklebt, welches die Zeitmarken von den beiden Federn PP' aufnahm. Die eine dieser Federn zeichnete die

1) J. Zeleny u. L. W. Mc Keehan, Phys. Rev., 1910.

Sekunden von der Uhr aus auf, und die andere verzeichnete den Augenblick, in welchem das Pulver losgelassen wurde. Der Teil des Papierstreifens, auf den das Pulver fiel, war zum Schutze gegen Luftströmungen von dem Metallgehäuse EE umgeben. Zwei Metallstangen FF hielten das Papier gegen das untere Ende der Fallröhre. Dieser Teil der Anordnung ist im unteren Teile der Figur vergrößert dargestellt. Die Fallröhre bestand aus den beiden konzentrischen Röhren G, H, von denen die äußere die innere gegen die Temperaturänderungen schützte. Die Länge der beiden Röhren betrug für gewöhnlich etwa 71 cm; der Durchmesser der äußeren Röhre betrug 3,5 cm und jener der inneren wurde verändert. Das untere Ende der inneren Röhre wurde durch einen Deckel mit einem kleinen Loche I verschlossen, das nur solchen Teilchen den Durchgang zu dem Papier CC gestattete, die durch den mittleren Teil der Röhre hindurchgegangen waren und somit keine Verzögerung von den Wänden erlitten hatten. Die beigefügte Zeichnung gibt die Röhre um 90° um ihre Achse gedreht wieder und läßt die feine Öffnung L erkennen, durch welche die Teilchen, die auf das Papier gefallen waren, hindurchgehen konnten, ohne von den darüber befindlichen Metallteilchen fortgewischt zu werden. Die Einzelheiten des Kastens A, aus dem das Pulver fallen gelassen wurde, sind bei M im Aufriß und bei N im Querschnitt gezeichnet, und zwar in einer Lage, die von der bei A um 180° abweicht. Das Lycopodium wurde oberhalb der Mitte der Fallröhre in die metallene Mulde R getan, deren Boden aus straff gespanntem Seidenstoff S hergestellt war. Die Stäbe TT', die in den abgebildeten Röhren beweglich waren, trugen den flachen Schlitten U. Dieser Schlitten streifte gerade den oberen Rand des Zylinders V, in dem sich eine durchlochte Scheidewand befand. In der Mitte des Schlittens war ein Loch und über diesem ein kurzer Zylinder, der durch einen kleinen Deckel mit einem Loch in der Mitte verschlossen wurde. Über dieses Loch im Deckel ragte die am Rande eben dieses Deckels befestigte biegsame Nadelspitze X hervor. Wenn der Schlitten nach rechts geschoben wurde (wie in der vergrößerten Figur), so strich die Nadel leicht über den Zeugboden und dadurch konnten einige Lycopodiumteilchen durch das kleine Loch im Schlitten in die Fallröhre hineingesiebt werden, wenn dieses Loch genau in der Mittelstellung stand. In diesem Augenblick stellte die Spitze Z mit Y einen elektrischen Kontakt her, durch den die Feder P betätigt wurde. Durch die Weiterbewegung des Schlittens über die Mittelstellung hinaus wurde das obere Ende der Fallröhre wieder verschlossen. Um den Rand des Deckels des Kastens A war ein Gummiband gelegt, und in den Gleitröhren befand sich Öl; hierdurch wurde der obere Teil des Apparates luftdicht gemacht und der Durchgang eines Konvektionsstromes durch die Röhre nach oben oder nach unten verhindert.

Das Verfahren bei der Ausführung eines Versuches war nun folgendes: Nachdem der Papierstreifen CC durch die Trommel D in Bewegung gesetzt worden war, wurde der Schlitten durch die Stange T vorgeschoben und gab einige Teilchen frei. Die Bewegung des Papiers wurde nicht unterbrochen, ehe nach den Ergebnissen früherer Versuche sämtliche Teilchen den Boden erreicht hatten. Dann wurde die Trommel angehalten, das Papierstück, das die Marken trug, vom übrigen abgeschnitten, auf eine glatte Fläche gelegt und sorgfältig mit einem Glasstreifen bedeckt, um jegliche spätere Verschiebung der Teilchen zu verhindern. Diese Teilchen waren auf dem schwarzen Papier mittels eines Mikroskops mit schwacher Vergrößerung leicht zu sehen, und die Zeit, die jedes Teilchen gebraucht hatte, um zu fallen, wurde aus den seitlichen Zeitmarken bestimmt. Die durchschnittliche Zeit, die die Teilchen brauchten, um die bekannte Länge der Röhre beim Fall zu durchlaufen, ergab die durchschnittliche Endgeschwindigkeit. Die Anzahl der Teilchen, die man bei jedem Versuche auf dem Papier erhielt, hing davon ab, wie hart die Spitze X über das Zeug hinstrich. Wir arbeiteten nur mit leichtem Streichen, weil sonst viele tausend Teilchen auf das Papier fielen. Bei den Vorversuchen haben wir mehrere andere Verfahren zum Loslassen der Teilchen versucht, aber das vorstehend beschriebene wurde schließlich als das beste angenommen.

Die Fallröhre wurde vielfach verändert. Wir verwandten innere Röhren von verschiedenen Durchmessern, die zwischen 3 mm und 25 mm lagen. Weiter füllten wir die äußere Röhre mit in der Mitte durchlochten Papierscheiben, die durch Papierringe auseinandergehalten wurden, wie es der Schnitt K in Fig. 6 angibt. Diese Anordnung wurde ersonnen, um die Luftzirkulation in der Röhre zu vermeiden und dabei jede Wirkung zu verringern, die etwa infolge der Nähe der Röhrenwandung in den kleinen Fallröhren auftreten könnte. Die Fallhöhe der Teilchen wurde durch die Verwendung von Fallröhren mit einer Länge von 71 cm bzw. 211 cm verändert. Wie die Ergebnisse lehrten, hatte keine dieser Veränderungen irgendwelchen ausgesprochenen Einfluß auf den Wert, den wir für die Endgeschwindigkeit der Teilchen erhielten.

Die Lycopodiumteilchen bleiben sehr leicht aneinander haften; infolgedessen pflegen außer

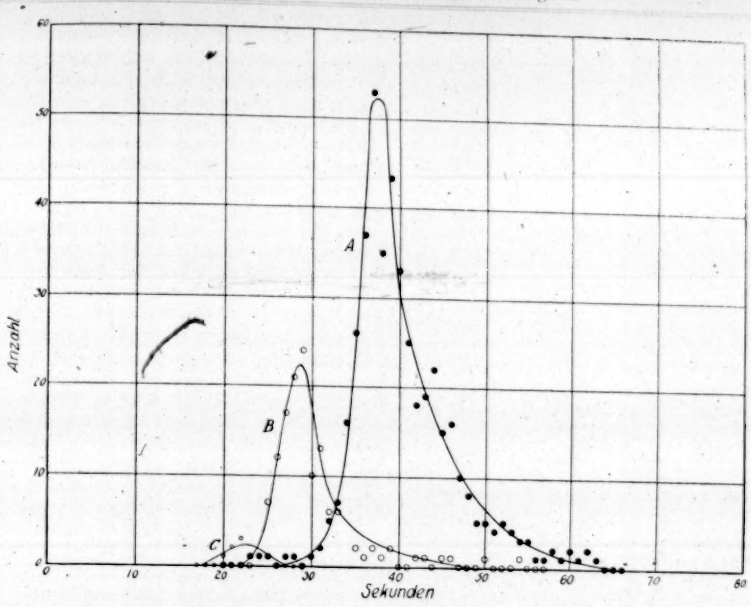


Fig. 7. Temperatur 21,1° C; Röhrenlänge 71,5 cm; mittlere Fallzeit der einzelnen Teilchen 40,7 Sek.; mittlere Fallzeit der doppelten Teilchen 29,8 Sek.; mittlere Endgeschwindigkeit der einzelnen Teilchen 1,76 cm/Sek.; mittlere Endgeschwindigkeit der doppelten Teilchen 2,40 cm/Sek.

den einzelnen Teilchen eine Anzahl von Gruppen solcher Teilchen zugleich mit abzufallen. Die größten dieser Gruppen werden den Boden zuerst erreichen, danach werden die kleineren Gruppen folgen, die mit dreien und zweien endigen, und schließlich die einzelnen Teilchen. Wir versuchten, die Abgabe großer Gruppen dadurch zu vermeiden, daß wir die Nadel nur ganz leicht über das Zeug streichen ließen.

Fig. 7 zeigt ein Beispiel für die Verteilung der Teilchen auf dem Papierstreifen nach der Fallzeit, und zwar wird die Anzahl der in jeder Sekunde gefallenen Teilchen durch die Ordinaten zu Ende dieser Sekunde dargestellt. Die Kurve *A* zeigt die Verteilung der einzelnen Teilchen, die Kurve *B* jene der doppelten und die Kurve *C* jene der dreifachen. Die mittlere Geschwindigkeit der einzelnen Teilchen, wie man sie aus dieser Reihe von Teilchen erhält, beträgt 1,76 cm/Sek., die der doppelten 2,40 cm/Sek. Die doppelten Teilchen fallen sonach 1,37 mal so schnell wie die einfachen. Eine unsymmetrische Gestalt der Verteilungskurve nach der Zeit ist zu erwarten, obwohl die Verteilungskurve nach der Größe symmetrisch ist (siehe Fig. 5), denn die Fallzeit eines Teilchens muß sich umgekehrt wie das Quadrat seines Halbmessers ändern. Demnach müßten drei Teilchen, deren Größen im Verhältnis $^2/_3 : 1 : ^4/_3$ stehen, Fallzeiten haben, die im Verhältnis $^9/_4 : 1 : ^9/_{16}$ zueinander stehen, und diese letztere Reihe ist keine arithmetische mehr. Die äußersten Fallzeiten der Teilchen, die durch die Kurve *A* in der Fig. 7 dargestellt werden, stehen ungefähr in dem auf Grund der Größenverteilung (Fig. 5) zu erwartenden Verhältnis; aber der Umstand, daß die Anzahl der Teilchen rechts vom Maximum in der Fig. 7 größer ist als die Anzahl links vom Maximum, deutet darauf hin, daß die kleineren Teilchen im allgemeinen die dichteren sind. Eine Übersicht der Ergebnisse, die wir für die Endgeschwindigkeit des Falles für Lycopodium erhalten haben, findet sich in der Tabelle I. Wie man sieht, stimmen die unter den verschiedenen Bedingungen erhaltenen Ergebnisse befriedigend untereinander überein.

d) Endgeschwindigkeit des Lycoperdons.

Die Lycoperdonteilchen waren so winzig, daß es nicht möglich war, bei ihnen den Apparat zu verwenden, den wir zur Bestimmung der Fallgeschwindigkeit des Lycopodiums benutzt haben. Es war nämlich beinahe unmöglich, die Teilchen, nachdem sie gefallen waren, mit dem Mikroskop

Tabelle I.

Lycopodium.

Röhrenlänge in cm	Röhrendurchmesser in cm	Anzahl der Teilchen	Endgeschwindigkeit des Falles in cm Sek.
71.5	*) 0,32	26	1,72
	*) 0,32	18	1,77
	0,32	102	1,70
	0,32	133	1,70
	0,64	30	1,71
	0,64	170	1,73
	**) 1,27	354	1,70
	**) 1,27	431	1,76
	**) 1,27	327	1,78
	**) 1,27	267	1,74
	**) 1,27	350	1,80
	1,27	60	1,76
	1,27	60	1,74
210.9	1,27	462	1,82
71.5	2,54	34	1,74
	2,54	138	1,80
	2,54	52	1,78

*) Größe der Öffnungen in 0,35 cm auseinanderstehenden Papierscheiben.

**) Größe der Öffnungen in 0,64 cm auseinanderstehenden Papierscheiben.

Mittlere Temperatur 22,4° C; mittlere Endgeschwindigkeit 1,76 cm Sek.

mit starker Vergrößerung aufzufinden, das nötig war, um sie zu sehen. Wir konstruierten deshalb einen neuen Apparat, der in Fig. 8 dargestellt ist.

Der obere Teil A, der die Vorrichtung zum Fallenlassen der Teilchen enthielt, war derselbe, den wir in dem anderen Apparate benutzt hatten, und der in Fig. 6 in seinen Einzelheiten abgebildet ist. Von A aus fielen die Teilchen durch die innerste der vier konzentrischen Messingröhren B, und zwar betrug die gesamte Fallhöhe für gewöhnlich 31,2 cm. Am unteren Ende der Fallröhre fielen die Teilchen auf die rotierende Spiegelglasscheibe C von 12,7 cm Durchmesser. Diese Scheibe war auf die Messingplatte D aufgekittet, an der die Rotationsachse befestigt war. Das Zahnrad E war auf derselben Achse befestigt und wurde mittels eines Treibriemens von einem Chronographenmotor aus unter Vorschaltung eines Geschwindigkeitsregulators bewegt. Die Zeit eines Umlaufes betrug ungefähr 20 Minuten. Auf dem Rade E war eine Papierscheibe angebracht, und eine (in der Figur nicht sichtbare) feststehende Feder, die durch ein Uhrwerk betätigt wurde, verzeichnete die Sekunden auf dem Papier. Die Spiegelglasscheibe war vollkommen in ein Metallgehäuse F eingeschlossen, so daß der ganze Raum im Innern des Apparates praktisch luftdicht war. Gegenüber der Fallröhre B hatte das Gehäuse F eine Öffnung, durch welche die Teilchen mit Hilfe des Mikroskopes M beobachtet wurden. Ein Schnitt durch diesen Teil des Apparates ist in der unteren rechten Ecke der Figur in vergrößertem Maße wiedergegeben. Die Öffnung im Deckel des Kastens wurde durch ein dünnes Mikroskopdeckglas G verschlossen. Die obere Fläche der Glasscheibe C drehte sich ganz dicht an diesem Deckglase, wodurch die Verwendung eines sehr stark vergrößernden Objektives M ermöglicht wurde. Der oberen Öffnung gegenüber befand sich in der unteren Wandung von F ein entsprechendes Fenster, das durch die Glasplatte K verschlossen wurde. Licht wurde von dem Spiegel L nach oben reflektiert und beleuchtete das Gesichtsfeld des Mikroskopes. Wenn die Platte langsam rotierte, gelangten die auf ihrer Oberfläche befindlichen Teilchen in das helle Gesichtsfeld des Mikroskopes; dort konnte man sie sehr deutlich sehen und nach Wunsch ihren Durchmesser mit dem Okularmikrometer N ausmessen. Die Bewegung der Glasscheibe er-

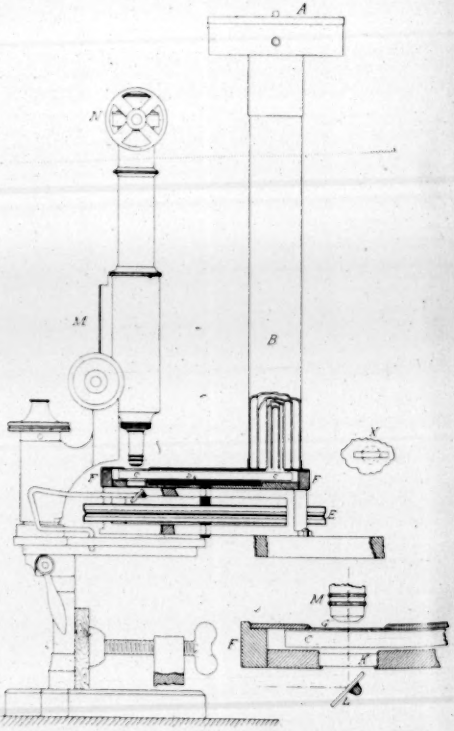


Fig. 8.

folgte so sicher, daß bei ihrer Umdrehung ihre Oberfläche leicht in der Brennebene zu halten war. Ein weiteres Fenster, das in der Figur nicht sichtbar ist und das durch einen abnehmbaren Deckel verschlossen wurde, war in der oberen Wand des Kastens F vorgesehen; es diente zur Beseitigung der Teilchen von der Glasplatte nach Beendigung der einzelnen Versuche. Die Öffnung am unteren Ende der Fallröhre wurde durch ein Diaphragma mit einem 3 mm breiten Spalt verschlossen (das bei X zu sehen ist). Durch diesen Verschluß wurde nicht nur eine genauere Bestimmung der Fallzeit ermöglicht, sondern auch verhindert, daß solche Teilchen, die an den Seiten der Fallröhre entlang gefallen waren, unter jene geraten konnten, die mitten durch die Röhre gefallen waren.

Da die Zeit, die einige der kleinsten Teilchen brauchten, um die Strecke von 31,2 cm zu durchfallen, 15 Minuten betrug, so wurden große Vorsichtsmaßregeln zum Schutze gegen Konvektionsströmungen in der Fallröhre angewandt. Der Apparat wurde in einem Raum mit konstanter Temperatur aufgestellt, und die Teilchen wurden erst mehrere Stunden nach beendeter Einstellung fallen gelassen. Der Beobachter betrat das Zimmer nicht eher, als nötig war, um den Versuch zu beginnen. Nachdem der von dem Treibriemen abgeschaltete Chronographenmotor in Betrieb gesetzt worden war, wurden die Teilchen losgelassen, und in demselben Augenblick wurde der Treibriemen eingerückt und damit die Scheibe in langsame Umdrehung versetzt. Die Feder, welche die Zeit aufzeichnete, fing also mit ihren Aufzeichnungen in dem Augenblicke an, in dem die Teilchen zu fallen begannen.

Nachdem die Teilchen gefallen waren, wurde die Scheibe in eine bestimmte Stellung gedreht. Dadurch kam der Teil der Scheibe unter das Mikroskop zu liegen, der sich zu Anfang des Versuches unter der Mitte der Fallröhre befunden hatte. Ein feststehender Zeiger wurde dann der Anfangsmarke der Zeit auf dem Papier gegenübergestellt. Wenn nun die Scheibe so lange gedreht wurde, bis ein Teilchen im Mittelpunkte des Mikroskopfeldes erschien, so gab der Zeiger die Zeit an, die dieses Teilchen zum Fallen gebraucht hatte. Wir gingen dabei von der Anfangsstellung der Scheibe aus und drehten die Scheibe langsam, wobei wir die Zeiten ermittelten, welche die verschiedenen Teilchen zum Fallen gebraucht hatten. Dann wurde das Mikroskop radial über eine Feldbreite verschoben und das Verfahren so lange wiederholt, bis die Fallzeit sämtlicher Teilchen auf der Scheibe bestimmt worden war. Welcher Art die mit Lycoperdon gewonnenen Ergebnisse waren, wird durch Fig. 9 veranschaulicht.

Das Zeitintervall wurde in Teile von je zehn

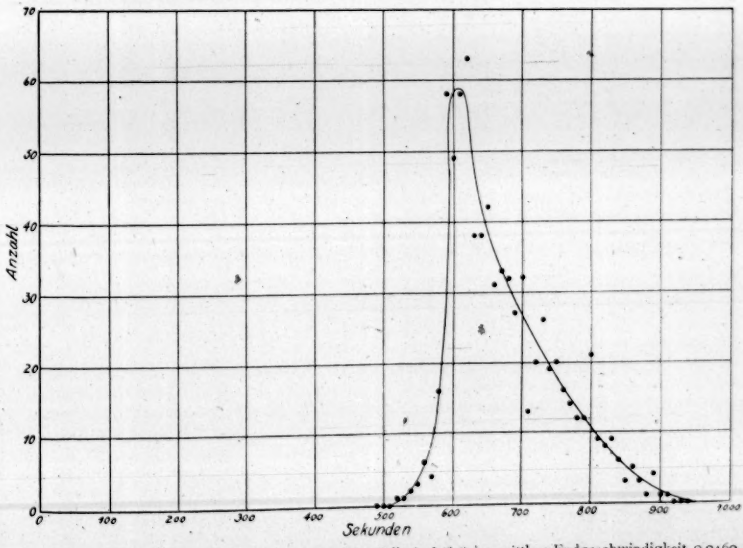


Fig. 9. Temperatur 20,8° C; Röhrenlänge 31,2 cm; mittlere Fallzeit 678 Sek.; mittlere Endgeschwindigkeit 0,0460 cm Sek

Sekunden eingeteilt und dann die in jedem dieser kleineren Intervalle ermittelte Anzahl von Teilchen am Ende des Intervalles als Ordinate aufgetragen. Die Kurve, welche die Verteilung auf der Scheibe wiedergibt, ist der beim Lycopodium erhaltenen ähnlich. Wir finden auch hier in derselben Weise angedeutet, daß im allgemeinen die kleineren Teilchen dichter sind als die größeren. Die Fallhöhe war bei allen Versuchen 31,2 cm, mit Ausnahme zweier Versuche, bei denen sie in 10,4 cm verändert worden war, ohne daß sich indessen der gefundene Wert für die Geschwindigkeit geändert hätte. Bei einigen Versuchen war ein Röhrchen mit Radium in den Kasten gelegt worden, aus dem die Teilchen fallen gelassen wurden, um jede Elektrisierung zu beseitigen, welche die Teilchen etwa beim Durchgang durch das Zeug hätten annehmen können. Aber auch diese Maßregel hatte keinen Einfluß auf den für die Endgeschwindigkeit erhaltenen Wert. Eine Übersicht über die mit Lycoperdon gewonnenen Ergebnisse findet man in der folgenden Tabelle II.

Tabelle II.

Lycoperdon.

Durchmesser der Röhre in cm	Anzahl der Teilchen	Endgeschwindigkeit in cm Sek.
1,27	280	0,0463
1,27	757	0,0462
0,64	713	0,0473
0,64	104	0,0480
0,64	75	0,0470
0,64	75	0,0475
0,64	216	0,0457
0,64	652	0,0460
0,64	292	0,0465
0,64	186	0,0468

Länge der Röhre 31,2 cm; mittlere Temperatur 20,5° C; mittlere Endgeschwindigkeit 0,0467 cm Sek.

Die Geschwindigkeit des Lycoperdons ist so gering, daß es uns möglich schien, sie durch Beobachtung des Falles durch das Gesichtsfeld eines Mikroskopes zu bestimmen. Wir stellten eine 8 cm hohe Glaszelle von quadratischem Querschnitt mit 1 mm Seitenlänge vor einem horizontal angeordneten Mikroskop auf. In die obere Öffnung der Zelle steckten wir ein Stück des Flockenstreulings; wenn wir dann an die Zelle klopften, so fiel ein Schauer von Sporen durch den engen Kanal herab. Der untere Teil des Raumes war ganz frei von Luftströmungen, denn die einzelnen Teilchen sanken in geraden Linien. Es war keine Brownsche Bewegung zu beobachten, und ebensowenig war irgendwelche Rotation der einzelnen Teilchen zu bemerken, obschon einige der doppelten rotierten. Die Zeit, welche die Teilchen brauchten, um sich eine Strecke von 2 mm weit zu bewegen, wurde mit einer Stoppuhr bestimmt und eine mittlere Geschwindigkeit von 0,05 cm/Sek. ermittelt. Dieser Wert stimmt in roher Annäherung mit dem Ergebnis der genaueren Methode überein. Die Methode der direkten Beobachtung ist jedoch aus zwei Gründen unzulänglich: Die Messung der Zeit für die sich schnell durch das Gesichtsfeld bewegenden Teilchen ist schwierig, und es ist nicht möglich, aus der Zeitbestimmung für einzelne willkürlich aus einer Gruppe zu gleicher Zeit abgefallener Teilchen herausgegriffene Teilchen die mittlere Geschwindigkeit der Gruppe zu erhalten, weil man nicht weiß, wie groß der Bruchteil aus der Gesamtzahl ist, der irgendeine beobachtete Geschwindigkeit besitzt.

e) Endgeschwindigkeit des Polytrichums.

Die Versuche mit Polytrichum wurden in derselben Weise ausgeführt wie die mit Lycoperdon. Die Kurven, welche die Verteilung der Teilchen nach der Fallzeit darstellen, sind den für Lycoperdon gefundenen ähnlich, nur sind die Maxima nicht so scharf ausgeprägt. Tabelle III enthält eine Zusammenstellung der mit einer Fallröhre von 0,64 cm Durchmesser und einer Fallhöhe von 31,2 cm gewonnenen Ergebnisse.

Tabelle III.

Polytrichum.

Anzahl der Teilchen	Endgeschwindigkeit in cm Sek.
35	0,221
15	0,229
1551	0,238
1674	0,218
2337	0,238
832	0,250
2653	0,226
668	0,215

Mittlere Temperatur 25,3° C; mittlere Endgeschwindigkeit 0,229 cm Sek.

f) Vergleich mit der Theorie.

In der Tabelle IV haben wir die verschiedenen Ergebnisse für Sporen zusammengestellt und den beobachteten Endgeschwindigkeiten des Falles die nach der Formel $V = \frac{2\,g\,a^2(\sigma-\varrho)}{9\quad\mu}$ berechneten gegenübergestellt. Bei der Berechnung haben wir den Wert von μ benutzt ($\mu = 0{,}000191$ bei 18° C); den Zemplén[1]) neuerdings erhalten hat, einen Wert, der etwas höher ist als der bisher angenommene.

In der vierten Spalte haben wir das Verhältnis von a zu $\frac{\mu}{V \cdot \varrho}$ angegeben, um zu zeigen,

1) Gy. Zemplén, Ann. d. Phys. (4) **29**, 869, 1909.

Tabelle IV.
Vergleichung der beobachteten und berechneten Geschwindigkeiten für Sporen.

Name	Halbmesser in cm	Dichte	$\frac{a V \cdot \varrho}{\mu}$	Mittlere Temperatur in ° C	Mittlere Geschwindigkeit in cm/Sek. beobachtet	Mittlere Geschwindigkeit in cm/Sek. berechnet	$\frac{V_{ber.}}{V_{beob.}}$
Lycopodium . .	0,00158	1,175	0,02	22,4	1,76	3,40	1,93
Lycoperdon . .	0,000478	1,53	0,0007	25,3	0,220	0,396	1,73
Polytrichum . .	0,000209	1,44	0,00007	20,5	0,0467	0,0718	1,52

daß die für die Anwendbarkeit der Formel erforderliche Bedingung in betreff der Größe erfüllt ist, nämlich die Bedingung, daß a gegenüber $\frac{\mu}{V \cdot \varrho}$ klein sein muß[1]). Wie man sieht, ist in allen Fällen die berechnete Geschwindigkeit größer als der beobachtete Wert, und zwar ist der Unterschied bei den größeren Teilchen größer.

§ 3. Versuche mit künstlichen Kugeln.

a) Schwarzes Wachs.

In Anbetracht der Unstimmigkeiten, die wir bei Sporen zwischen den beobachteten und den berechneten Werten für die Endgeschwindigkeit gefunden haben, wandten wir demnächst unser Augenmerk der Herstellung künstlicher Kugeln

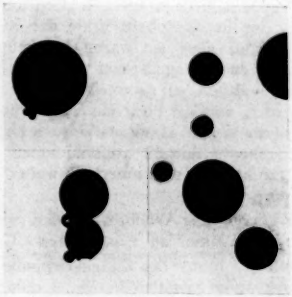


Fig. 10.

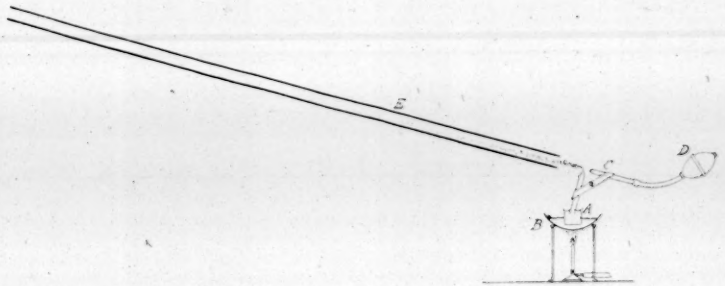


Fig. 11.

zu. Wir fanden, daß sich Paraffin nach dem Schmelzen durch einen Zerstäuber in winzige kugelförmige Tropfen zerteilen ließ, die nach dem Erstarren ihre Gestalt beibehielten, obgleich infolge der dabei auftretenden Kontraktion die Oberfläche der Kugeln etwas rauh wurde. Wir benutzten dann zunächst ein hartes, brüchiges, schwarzes Wachs von unbekannter Zusammensetzung, und es erwies sich, daß dieses für den vorliegenden Zweck wunderbar gute Eigenschaften besaß. Die vollkommenen Kugeln, die wir erhielten (siehe Fig. 10), haben eine ganz glatte Oberfläche und ließen sich in jeder gewünschten Größe herstellen. Die Kugeln wurden nach folgendem Verfahren dargestellt und gesammelt. Ein Stück von dem Wachs wurde in einem Becher A (Fig. 11) geschmolzen und beträchtlich über den Schmelzpunkt (bis auf ungefähr 150° C) in einem Sandbade B erhitzt. Der Zerstäuber C bestand aus zwei Glasröhren. Die Größe und die Einstellung der Öffnungen dieser Röhren waren für die Größe der erhaltenen Kugeln von großer Bedeutung. Wenn die Temperatur der vertikalen Röhre nicht durch gelegentliche Anwendung einer Flamme genügend hoch gehalten wurde, so kühlte der Luftstrom das Wachs oft

1) Rayleigh, Phil. Mag. (5) **36**, 365, 1893.

so stark ab, daß es zu langen Fäden ausgezogen wurde oder gar das Ende der Röhre vollständig verstopfte. Das zerstäubte Wachs wurde durch den Luftstrom selbst in das Ende einer langen geneigten Glasröhre E von ungefähr 3 cm lichter Weite und 150 cm Länge hineingeblasen. Beim Durchgange der Luft durch diese Röhre setzten sich viele von den suspendierten Kugeln an der Wand ab, während die feinsten aus dem oberen Ende als feiner Rauch aufstiegen. Einige von diesen feinsten Kügelchen ließen sich in einem lockeren Wattepfropfen auffangen, der in das obere Ende der Röhre gesteckt wurde, aber sie waren beinahe alle zu klein, um genau ausgemessen werden zu können. Um die Teilchen zu sammeln, hielten wir die Glasröhre E vertikal über ein Stück Papier und klopften an sie. Auf diese Weise erhielten wir eine ungeheure Anzahl vollkommener Kugeln, deren Durchmesser sich innerhalb weiter Grenzen bewegten.

Die Dichte des Wachses fanden wir durch Wägung in Wasser zu 1,058 bei 20° C.

Zur Bestimmung der Endgeschwindigkeit des Falles benutzten wir den in Fig. 8 dargestellten Apparat und brachten einen Vorrat der gesammelten Kugeln in die Mulde in dem Abfallkasten (R in Fig. 6). Der einzige Unterschied zwischen der Art der Ausführung der Versuche mit dem neuen Material und jener der Versuche mit den Sporen bestand darin, daß wir jetzt nicht nur die Fallzeit jedes auf der rotierenden Scheibe gefundenen Teilchens zu bestimmen hatten, sondern außerdem noch seinen Durchmesser ausmessen mußten. Die Teilchen sind etwas durchsichtig, und die Oberfläche reflektiert nicht so gut, als daß man ein scharf umrissenes Bild erhielte, das die Ausführung genauer Ablesungen gestattete. Es ergab sich, daß einige der Teilchen eine oder mehrere Luftblasen enthielten, und wir verwarfen alle Teilchen, in denen diese einen merklichen Teil des Volumens ausmachten, sowie auch die, an denen etwas Staub haftete. Wegen der Breite des Spaltes am unteren Ende der Fallröhre (X in Fig. 8) kann der Fehler in der Fallzeit des einzelnen Teilchens bis zu 0,6 Sekunden betragen.

Die Tabelle V enthält eine Zusammenstellung der Ergebnisse, die wir bei vier verschiedenen Versuchen für alle Teilchen erhalten haben.

Die Werte in der dritten Spalte sind nach der Stokesschen Formel unter Zugrundelegung des Wertes 0,000192 für μ bei 20° berechnet worden. Den Grenzwert für die Größe, für welche die Formel noch gilt, findet man, wenn man $\frac{aV\varrho}{\mu} = 0{,}1$ setzt (wenn man 0,1 als kleine

Tabelle V.
Schwarzes Wachs.

Halbmesser der Kugeln in cm	Fallzeit in Sek. (±0,6Sek.) beob.	Fallzeit in Sek. ber.	Halbmesser der Kugeln in cm	Fallzeit in Sek. (±0,6Sek.) beob.	Fallzeit in Sek. ber.
0,00366	3,4	1,9	0,00113	21,1	20,2
0,00218	6,3	5,4	0,00105	22,5	23,4
0,00217	6,6	5,5	0,00087	32,6	34,0
0,00211	6,2	5,8	0,00075	47,3	45,8
0,00205	6,9	6,2	0,00070	54,4+	52,6
0,00197	6,4	6,7	0,00069	54,9:	54,0
0,00195	7,9	6,8	0,00067	61,9	57,4
0,00194	7,1	6,9	0,00067	62,7	57,4
0,00191	8,5	7,1	0,00066	57,1	59,1
0,00181	10,1	7,9	0,00064	60,6	62,9
0,00178	8,0	8,2	0,00059	67,8	74,0
0,00172	8,2	8,7	0,00058	75,8	76,6
0,00169	8,8	9,0	0,00054	82,5	88,4
0,00167	9,9	9,3	0,00050	97,3	103,2
0,00165	10,6	9,5	0,00049	105	107
0,00165	11,1	9,5	0,00049	113	107
0,00156	11,4	10,6	0,00048	116	112
0,00151	12,2	11,3	0,00046	120	122
0,00147	11,4	11,9	0,00045	118	127
0,00146	12,4	12,1	0,00044	152	133
0,00145	13,4	12,2	0,00042	135	146
0,00142	13,3	12,8	0,00041	144	153
0,00130	15,6	15,2	0,00039	166	169
0,00130	15,7	15,2	0,00038	184	178
0,00124	16,8	16,8	0,00036	191	199
0,00121	17,4	17,6	0,00035	166	211
0,00119	13,0	18,2	0,00035	227	211
0,00119	16,6	18,2	0,00035	231	211
0,00117	13,6	18,8			

Mittlere Temperatur 20,0° C; Fallhöhe 31,2 cm; Durchmesser der Röhre 0,64 cm.

Größe bezeichnet[1]). Das entspricht einem Halbmesser von ungefähr 0,0022 cm. Sämtliche Teilchen, mit Ausnahme des ersten, liegen innerhalb dieser Grenze. Die in der Tabelle V angeführten Ergebnisse sind in der oberen Kurve der Fig. 12 graphisch dargestellt. Auf dieser Kurve stellen die verschiedenen Kreise die einzelnen Beobachtungen dar, und die ausgezogene Kurve gibt die theoretischen Werte wieder. Die Abweichung von der theoretischen Kurve ist bei ein paar der beobachteten Werte groß, aber im Durchschnitt beträgt die Abweichung weniger als $^1/_2$ v. H. Die Ergebnisse, die sich über einen so weiten Größenbereich erstrecken, zeigen ganz bündig die Gültigkeit der Stokesschen Formel für diese Kugeln.

Einige Teilchen des schwarzen Wachses sind so groß, daß es notwendig wird, den Fehler zu berechnen, der dadurch entstehen kann, daß die Teilchen Zeit brauchen, um ihre Endgeschwindigkeit zu erreichen. Die Bewegungsgleichung für die fallende Kugel ist

$$\frac{dv}{dt} + kv = g,$$

1) Rayleigh, Phil. Mag. (5) **38**, 365, 1893.

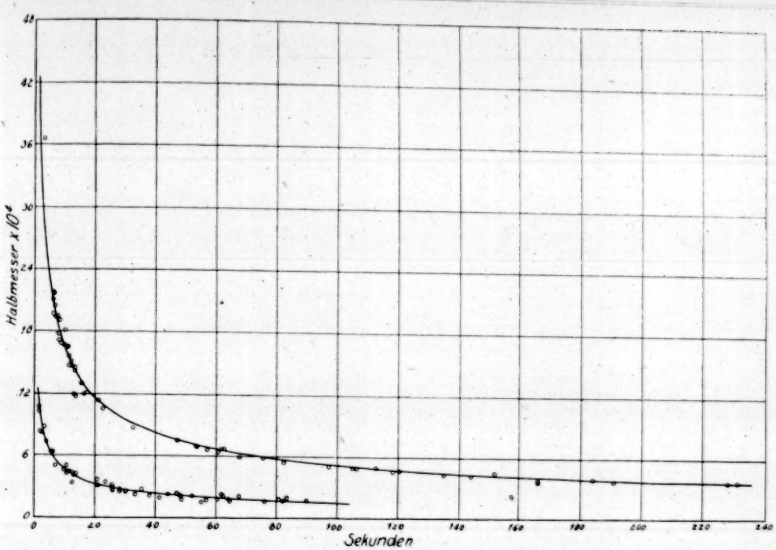


Fig. 12.

wo

$$k = \frac{6\pi\mu a}{{}^4/_3\pi a^3(\sigma-\varrho)} = \frac{9\mu}{2a^2(\sigma-\varrho)}$$

ist; daraus ergibt sich:

$$v = \frac{g}{k}(1-e^{-kt}),$$

wo $\frac{g}{k}$ die Endgeschwindigkeit ist. Wir können ermitteln, wieviel Zeit verstreicht, bis die Geschwindigkeit der Kugel sich bis auf 1 v. H. der Endgeschwindigkeit nähert, wenn wir den Wert von t ermitteln, für den e^{-kt} gleich 0,01 ist.

Für die größte Kugel, auf welche die Formel von Stokes anwendbar ist, gilt

$$a = 0{,}0022 \text{ cm},$$

und folglich

$$k = 165,$$

so daß

$$t = 0{,}03 \text{ Sek.}$$

wird. Dieser Wert beträgt weniger als 0,6 v. H. der gesamten Fallzeit, und der Fehler, den wir durch die Annahme einführen, daß die Endgeschwindigkeit augenblicklich erreicht wird, dieser Fehler ist demnach noch geringer als 0,6 v. H. und kann daher ruhig vernachlässigt werden.

b) Quecksilber.

Wir stellten weiterhin einige Versuche mit winzigen Quecksilbertropfen an, die wir gleichfalls mittels eines Zerstäubers herstellten. Die Fallzeit und der Tropfendurchmesser wurden mit derselben Apparatur und in derselben Weise bestimmt wie beim schwarzen Wachs. Bei der Ausmessung des Durchmessers ergab sich indessen eine ernste Schwierigkeit aus der Unmöglichkeit, bei dem hohen Reflexionsvermögen des Quecksilbers scharf definierte Bilder der Tropfen zu erhalten. Wir fanden, daß unter den gegebenen engen Bedingungen das beste Beleuchtungssystem in einer seitlichen Beleuchtung im Verein mit einer schwachen Beleuchtung von unten her bestand. Nichtsdestoweniger waren die Messungsfehler recht groß, zumal wir, um die Stokessche Formel auf eine so dichte Substanz anwenden zu können, äußerst winzige Tropfen verwenden mußten. Die Ergebnisse, die wir bei verschiedenen Versuchen mit den Quecksilbertropfen erhielten, sind in der Tabelle VI zugleich mit den theoretischen Werten zusammengestellt.

Diese Beobachtungen sind in der unteren Kurve der Fig. 12 graphisch dargestellt; hier gibt gleichfalls die ausgezogene Linie die theoretischen Werte an. Wie man sieht, weisen die einzelnen Beobachtungen sehr große Abweichungen auf, aber nichtsdestoweniger drängen sich die Ergebnisse im allgemeinen um die Linie zusammen, welche die theoretischen Werte darstellt. Für einen Quecksilbertropfen, dessen Halbmesser gleich 0,001 cm ist, ist das Ver-

Tabelle VI.

Quecksilber.

Halbmesser der Kugeln in cm	Fallzeit in Sek. (+0,6 Sek.) beob.	Fallzeit in Sek. ber.	Halbmesser der Kugeln in cm	Fallzeit in Sek. (+0,6 Sek.) beob.	Fallzeit in Sek. ber.
0,001075	1,6	1,8	0,000274	25,8	27,0
0,001030	1,6	1,9	0,000273	28,3	27,2
0,000880	3,2	2,6	0,000207	25,8	28,5
0,000830	1,9	2,9	0,000267	30,3	28,5
0,000826	2,5	3,0	0,000254	28,3	31,5
0,000736	4,0	3,7	0,000252	30,2	32,0
0,000640	5,7	4,9	0,000239	47,0	35,5
0,000640	4,7	4,9	0,000238	47,1	35,8
0,000508	10,6	7,9	0,000234	61,8	37,1
0,000506	7,0	7,9	0,000233	44,4	37,4
0,000465	9,8	9,4	0,000225	33,4	40,1
0,000449	11,3	10,0	0,000223	62,3	40,8
0,000437	12,4	10,6	0,000222	48,1	41,2
0,000428	10,5	11,1	0,000216	38,0	43,5
0,000428	10,8	11,1	0,000215	52,1	43,9
0,000422	13,8	11,4	0,000205	83,6	48,3
0,000413	13,0	11,9	0,000194	41,5	53,9
0,000370	20,8	14,8	0,000188	80,7	57,5
0,000349	23,3	16,6	0,000186	64,1	58,6
0,000338	12,5	17,7	0,000185	67,6	59,4
0,000324	25,6	19,3	0,000181	48,7	62,0
0,000324	25,6	19,3	0,000179	58,3	63,4
0,000322	25,5	19,6	0,000177	56,8	64,8
0,000318	20,9	20,1	0,000174	89,9	67,0
0,000314	25,8	20,6	0,000170	82,3	70,4
0,000314	21,0	20,6	0,000165	76,3	74,7
0,000309	20,7	21,3	0,000164	64,7	75,6
0,000277	35,4	26,5	0,000159	55,2	80,4
0,000275	28,3	26,8			

Mittlere Temperatur 20,3° C; Fallhöhe 31,2 cm; Durchmesser der Röhre 0,64 cm.

hältnis $\frac{a V \cdot \varrho}{\mu} = 0{,}107$, und folglich liegen alle kleineren Tropfen innerhalb des Gültigkeitsbereiches der Stokesschen Formel. Die Zeit, die ein Tropfen von der angegebenen Größe braucht, um eine Geschwindigkeit zu erreichen, die sich der Endgeschwindigkeit bis auf 1 v. H. nähert, diese Zeit beträgt 0,08 Sek., also 4 v. H. der gesamten Fallzeit in dem benutzten Apparate.

c) Paraffin.

Die kugelförmigen Teilchen, die wir mit dem Zerstauber aus Paraffin herstellten, unterscheiden sich von den aus schwarzem Wachs und aus Quecksilber hergestellten dadurch, daß sie nicht vollkommen glatte Wände haben. Durch die Kontraktion des Paraffins bei der Abkühlung werden die Wände ganz rauh und mitunter sogar mehr oder minder zackig (siehe Fig. 13). Wir bestimmten die Endgeschwindigkeit für eine Anzahl dieser Kugeln, um zu sehen, ob diese Rauheit irgendwelchen Einfluß auf ihre Fallgeschwindigkeit hat. Die Dichte des Paraffins erhielten wir im ganzen durch Wägung in Wasser zu 0,906. Zur Bestimmung ihrer Fall-

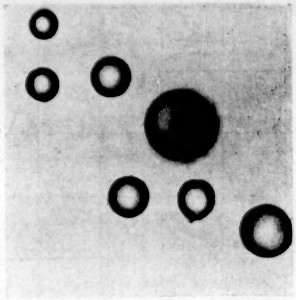


Fig. 13.

zeit brachten wir die Kugeln ihrer Adhäsion wegen nicht in den Trog R (Fig. 6). Statt dessen ließen wir den Strom der zerstäubten Teilchen direkt auf die Unterseite des Troges treffen, wo sie haften blieben. Die zum Ab-

Tabelle VII.

Paraffin.

Halbmesser der Kugeln in cm	Fallzeit in Sek. (+0,6 Sek.) beob.	Fallzeit in Sek. ber.	Halbmesser der Kugeln in cm	Fallzeit in Sek. (+0,6 Sek.) beob.	Fallzeit in Sek. ber.
0,00415	1,5	1,8	0,00214	6,7	6,6
0,00372	3,2	2,2	0,00206	7,3	7,2
0,00369	2,5	2,2	0,00202	8,55	7,4
0,00354	3,4	2,4	0,00200	7,43	7,6
0,00343	3,75	2,6	0,00200	7,4	7,6
0,00328	2,65	2,8	0,00180	8,7	9,4
0,00327	3,8	2,8	0,00179	9,05	9,5
0,00324	4,1	2,9	0,001725	10,95	10,2
0,00317	3,5	3,0	0,001645	10,05	11,2
0,00313	3,3	3,1	0,00163	10,6	11,4
0,00309	3,2	3,2	0,00161	11,5	11,7
0,00307	4,15	3,2	0,00157	12,5	12,3
0,00302	3,9	3,3	0,001554	12,1	12,5
0,00300	3,0	3,4	0,001535	11,3	12,9
0,002785	3,8	3,9	0,00152	14,2	13,1
0,00278	3,85	3,9	0,00142	15,2	15,0
0,00278	4,3	3,9	0,00140	15,6	15,5
0,00274	5,3	4,0	0,00135	18,8	16,6
0,00272	5,3	4,1	0,00123	18,1	20,0
0,00267	4,75	4,3	0,00122	22,5	20,4
0,00260	3,75	4,5	0,00117	21,3	22,2
0,00256	4,9	4,6	0,00116	20,7	22,5
0,00256	1,8	4,6	0,00116	20,2	22,5
0,00255	4,8	4,7	0,001145	24,6	23,2
0,00247	5,3	5,0	0,00109	27,3	25,5
0,00247	5,9	5,0	0,00106	25,7	27,0
0,00244	6,7	5,1	0,001035	29,6	28,3
0,00242	5,1	5,2	0,000965	30,4	32,5
0,00240	5,85	5,3	0,000862	45,7	40,7
0,00230	5,25	5,7	0,00085	38,6	41,9
0,00223	6,6	6,1	0,000665	77,7	68,4
0,00221	6,3	6,2	0,000579	92,1	90,4
0,00220	6,5	6,3	0,000527	106,0	109,0
0,00216	7,3	6,5	0,000500	123,2	121,4

Mittlere Temperatur 20,3° C; Fallhöhe 31,2 cm; Durchmesser der Röhre 0,64 cm.

werfen dienende Nadelspitze brachte sie einfach aus ihrer Lage. Die Ergebnisse sind in der Tabelle VII zusammen mit den nach der Formel berechneten aufgeführt.

Die Größengrenze für die Anwendbarkeit der Formel ergab sich zu 0,0024 cm; somit liegen viele von den größeren Teilchen in dieser Tabelle außerhalb der Grenze. Für diese Teilchen muß der tatsächliche Widerstand gegen die Bewegung beträchtlich größer sein als der bei der Rechnung berücksichtigte, und die Ergebnisse zeigen, daß dies der Fall ist. Die durchschnittliche Abweichung von den theoretischen Werten beträgt bei den innerhalb der Grenze liegenden Teilchen weniger als 1 v. H. Die Ergebnisse sind in Fig. 14 graphisch dargestellt. Daselbst gibt wieder die ausgezogene Kurve die nach der Stokesschen Formel gewonnenen Werte an.

Es scheint nach einer Vergleichung zwischen diesen Ergebnissen und den mit den schwarzen Wachskügelchen erhaltenen, daß eine Rauheit der Oberfläche von der Größenordnung, wie wir sie bei den Paraffintröpfchen gefunden haben, ohne Einfluß auf die Endgeschwindigkeit des Falles ist, und daß sie somit bei den angewandten Geschwindigkeiten keine Wirbelbewegung erregt.

§ 4. Diskussion der Ergebnisse.

Da die Endgeschwindigkeit der künstlichen Kugeln so gut mit der theoretischen Formel in Einklang steht, so verlangt die bei den Sporen beobachtete Unstimmigkeit eine besondere Erklärung. Wie groß diese Unstimmigkeit ist, lehrt am besten ein Blick auf die Kurven für die Verteilung nach der Fallzeit für Lycopodium (Fig. 7) und für Lycoperdon (Fig. 9). Die theoretische Fallzeit für das Lycopodiumteilchen mittlerer Größe beträgt 21 Sekunden; dagegen zeigt die Kurve, daß auch nicht eines der schnellsten unter den Teilchen innerhalb dieser Zeit gefallen ist. Die theoretische Fallzeit für das Lycoperdonteilchen mittlerer Größe beträgt 434 Sekunden, während das schnellste Teilchen der ganzen Gruppe 530 Sekunden zum Fallen brauchte und die übrigen verschiedene Zeiten bis zu 910 Sekunden aufwärts brauchten. Die Übereinstimmung zwischen den einzelnen Bestimmungen der Endgeschwindigkeit für eine und dieselbe Substanz unter verschiedenen Versuchsbedingungen schließt die Möglichkeit aus,

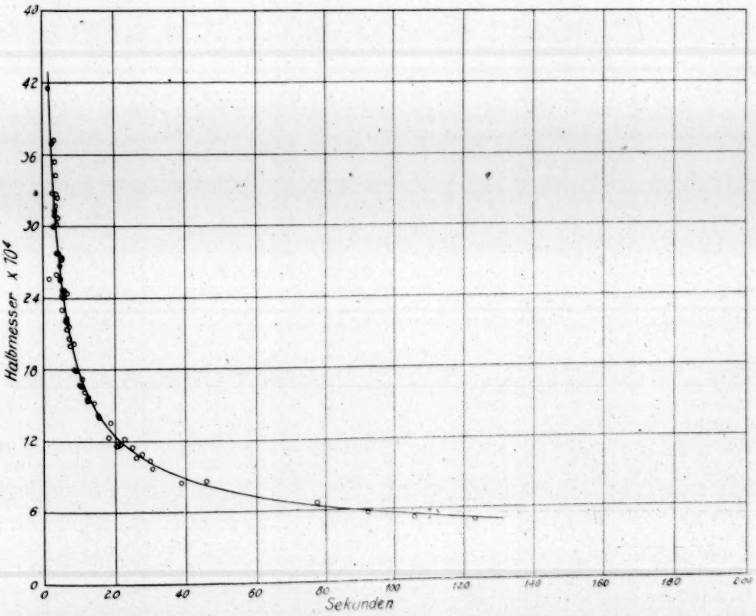


Fig. 14.

daß irgendwie größere Fehler in die Ergebnisse in betreff dieser Größe eingehen. Als weiterer Beweis sei einer der Versuche mit Quecksilbertropfen angeführt, bei welchem gleichzeitig einige wenige Teilchen von schwarzem Wachs und eine beträchtliche Anzahl Lycopodiumteilchen durch die Röhre fielen. Die Fallzeiten der Wachskugeln stimmten eng mit den berechneten Zeiten überein und sind auch unter den mitgeteilten Ergebnissen für schwarzes Wachs mit enthalten. Die durchschnittliche Geschwindigkeit der 44 Lycopodiumteilchen betrug 1,73 cm/Sek., ein Wert, der gut mit den früher mit der anderen Apparatur gewonnenen Ergebnissen übereinstimmt. Von den drei Arten von Teilchen, die hier unter genau identischen Bedingungen fielen, besaßen die Wachskugeln und die Quecksilberkugeln Geschwindigkeiten, die mit der Stokesschen Formel übereinstimmten, während das Lycopodium mit kaum mehr als der halben theoretischen Geschwindigkeit fiel. Die Unstimmigkeit beim Lycopodium kann daher nicht von Konvektionsströmen oder sonstigen Fehlern bei der Bestimmung der Fallgeschwindigkeit herrühren.

Es scheint nicht angängig, den Unterschied zwischen Theorie und Erfahrung auf Fehler bei der Ausmessung der Durchmesser der Sporen zurückzuführen, denn dazu müßte diese Messung beim Lycopodium ungefähr 40 v. H. und beim Lycoperdon ungefähr 24 v. H. zu groß ausfallen. In diesen beiden Fällen wenigstens waren sicherlich die Sporen bei den Fallversuchen von derselben Größe wie bei den Messungen. Sie waren vollkommen ausgereift und erlitten folglich keine Veränderung, und sie wurden in trockenem Zustande ausgemessen, geradeso, wie sie bei den Geschwindigkeitsbestimmungen benutzt wurden. Wir verwandten verschiedene Vergrößerungen, welche besondere Eichungen des Okularmikrometers erforderlich machten.

Bei den Dichtebestimmungen entsteht die Frage, ob nicht vielleicht das mit Hilfe des Volumenometers erhaltene Volumen fehlerhaft sein kann, weil etwa Gase aus der Oberfläche oder aus dem Innern der Sporen frei werden könnten, wenn der Druck vermindert wird. Wir stellten einen Versuch mit Glas an, das, wie man weiß, in der Oberfläche Gase kondensiert enthält. Wir bestimmten die Dichte zunächst durch Wägung in Wasser, dann mittels des Volumenometers in großen Stücken, und schließlich nach der letzteren Methode, nachdem wir es in einem Mörser so klein wie möglich gepulvert hatten. Die drei Ergebnisse standen in guter Übereinstimmung. Immerhin mögen sich Sporen in dieser Hinsicht anders verhalten als Glas. Eine mögliche Ersatzmethode, um die Dichte der Sporen zu erhalten, besteht darin, die Dichte einer Lösung zu ermitteln, in der sie eben untersinken. Gegen diese Methode läßt sich offenbar der Einwand erheben, daß die Sporen, wenn sie in die Flüssigkeit gebracht werden, Änderungen durch Osmose erleiden, und daß infolgedessen die für die nassen Sporen erhaltene Dichte nicht ihre Dichte im trockenen Zustande ist. Nichtsdestoweniger führten wir einige Versuche in der Weise aus, daß wir die Bewegung einzelner Sporen unter einem Mikroskop beobachteten, während sie in einer Lösung suspendiert waren, und auch, indem wir sie in Masse in Probiergläsern beobachteten. Die Unzuverlässigkeit der Methode zeigte sich sofort durch die Tatsache, daß die Sporen sich in verschiedenartigen Lösungen von derselben Dichte verschieden verhielten. Beispielsweise sank Lycoperdon in einer gesättigten wässerigen Lösung von $NaCl$, deren Dichte 1,201 betrug, während es in einer Lösung von $CaCl_2$ von der Dichte 1,200 aufstieg, dagegen in einer Lösung derselben Substanz, deren Dichte 1,163 war, gleichfalls sank. Die nach dieser Methode bestimmte Dichte von Lycopodium ergab sich zu $1{,}09 + 0{,}01$, bei Verwendung einer Chlorkalziumlösung und zu $1{,}13 \pm 0{,}02$ bei Verwendung einer Chlornatriumlösung. Mit dem Volumenometer wurde sie zu 1,175 ermittelt, und um die Unstimmigkeit zwischen den beobachteten und den berechneten Werten der Endgeschwindigkeit zu erklären, müßte man die Dichte zu nur 0,61 ansetzen.

Es bleibt nur noch der Einfluß der Gestalt der Sporen zu erwägen. Wir haben bereits den Beweis dafür geführt (§ 2), daß bei den Berechnungen ein nahezu kugelförmiges Teilchen ohne großen Fehler durch eine Kugel dargestellt werden kann, die den mittleren Durchmesser des Teilchens zum Durchmesser hat. In einer Beziehung mag indessen diese Äquivalenz nicht gelten, nämlich hinsichtlich der Tendenz, Wirbelbewegung zu erregen. Die Bedingungen für eine stetige Bewegung sind nicht ganz klargestellt, aber für den Fall einer Kugel mag die vollkommene Symmetrie der Stromlinien wohl die größte Stabilität der Bewegung darstellen. Die Symmetrie dieser Stromlinien hinter dem sich bewegenden Körper dürfte durch kleine Unebenheiten der Oberfläche nicht merklich beeinflußt werden. Die Dissymmetrie in den Stromlinien, die durch einen unvollkommen kugelförmigen Körper verursacht wird, muß von Kräften in dem Fluidum begleitet sein, die senkrecht auf der Bewegungsrichtung stehen, und diese Kräfte mögen ausreichen, um Wirbel hinter dem Körper bei viel kleineren Geschwindigkeiten zu erzeugen, als erforderlich sind, solche für den Fall der Kugel zu erregen. Einstweilen müssen wir

irgendeine derartige Erklärung als die wahrscheinlichste ansehen, da keine andere dazu angetan zu sein scheint, die großen Verschiedenheiten zwischen den beobachteten und den berechneten Endgeschwindigkeiten der benutzten Sporen zu erklären.

§ 5. Zusammenfassung.

Die mittlere Größe, mittlere Dichte und mittlere Endgeschwindigkeit des Falles in Luft der annähernd kugelförmigen Teilchen von Lycopodium, Lycoperdon und Polytrichum wurden experimentell gewonnen. Die beobachteten Werte der Endgeschwindigkeit waren viel kleiner als die entsprechenden nach der Stokesschen Formel berechneten Werte.

Ähnliche mit künstlichen Kugeln aus einem schwarzen Wachs, aus Quecksilber oder aus Paraffin angestellte Versuche lieferten innerhalb weiter Grenzen für die Kugelgröße für die Endgeschwindigkeit Ergebnisse, die gut mit der theoretischen Formel übereinstimmten und somit deren Gültigkeit unter den angewandten Versuchsbedingungen bewiesen.

Irgendwelche befriedigende Erklärung für die Unstimmigkeit bei den Versuchen mit Sporen ist nicht ersichtlich. Vielleicht wird eine turbulente Bewegung des Fluidums durch einen nahezu kugelförmigen Körper leichter erregt als durch einen solchen, der vollkommen kugelförmig ist.

Physikalisches Laboratorium der Universität Minnesota, 2. Dezember 1909.

(Nach dem Manuskript aus dem Englischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 16. Dezember 1909.)

Anwendung der Lobatschefskijschen Geometrie in der Relativtheorie.

Von V. Varićak.

Für die Zusammensetzung der Geschwindigkeiten in der Relativtheorie gelten die Formeln der sphärischen Trigonometrie mit imaginären Seiten, wie Sommerfeld unlängst in dieser Zeitschrift ausgeführt hat[1]). Nun ist die nichteuklidische Geometrie von Lobatschefskij und Bolyai das imaginäre Gegenbild der sphärischen, und so ersieht man leicht, daß sich der hyperbolischen Geometrie ein interessantes Anwendungsgebiet eröffnet.

Da eine Relativbewegung von Bezugssystemen mit Überlichtgeschwindigkeit nicht vorkommt, kann man immer

$$\frac{v}{c} = \operatorname{th} u$$

setzen[1]). Der Faktor $\left(1-\left(\frac{v}{c}\right)^2\right)^{-\frac{1}{2}}$, der in den Lorentz-Einsteinschen Transformationsgleichungen und den daraus abgeleiteten Formeln eine große Rolle spielt, geht in $\operatorname{ch} u$ über. Setzt man noch $l = ct$, so lauten die Transformationsgleichungen[2])

$$\begin{aligned} l' &= -x \operatorname{sh} u + l \operatorname{ch} u, \\ x' &= x \operatorname{ch} u - l \operatorname{sh} u, \\ y' &= y,\ z' = z, \end{aligned} \tag{1}$$

oder in der infinitesimalen Form

$$Uf = -l\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial l}. \tag{2}$$

Die inverse Transformation ist

$$\begin{aligned} l &= x' \operatorname{sh} u + l' \operatorname{ch} u, \\ x &= x' \operatorname{ch} u + l' \operatorname{sh} u, \\ y &= y',\ z = z'. \end{aligned} \tag{3}$$

Die diesen Transformationen gegenüber invarianten Hyperbeln

$$\omega(l, x) = l^2 - x^2 + \text{const} = 0$$

sind ihre Bahnkurven, da $U\omega = 0$ ist. Die absolute Invariante ist der Koordinatenanfangspunkt. Wird ein Punkt

$$x = \operatorname{sh} u_1,\ l = \operatorname{ch} u_1$$

der Transformation (1) unterworfen, so geht er in den dem Parameter $u_1 - u$ entsprechenden Punkt der Hyperbel $l^2 - x^2 = +1$ über. Aus dem Unendlichen kommend, geht der bewegte Punkt auf der negativen Seite ins Unendliche[3]). Der Parameter u ist die Maßzahl des doppelten Hyperbelsektors, der dem Winkel ψ entspricht. Es ist

$$\operatorname{th} u = \operatorname{tg} \psi,\ \operatorname{sh} u = \varkappa \sin \psi,\ \operatorname{ch} u = \varkappa \cos \psi$$

und die Gleichungen (3) gehen über in

$$\begin{aligned} l &= \varkappa (x' \sin \psi + l' \cos \psi) \\ x &= \varkappa (x' \cos \psi + l' \sin \psi) \\ y &= y',\ z = z', \end{aligned} \tag{4}$$

durch welche die Minkowskische Koordinatentransformation definiert ist[4]). Dabei bedeutet $\varkappa$ den Radiusvektor des entsprechenden Punktes der Hyperbel.

Deutet man u als Strecke, so ersieht man aus den Relationen

$$\frac{v}{c} = \operatorname{th} u = \operatorname{tg} \psi = \sin \operatorname{gd} u = \cos \Pi(u),$$

daß der zugehörige Parallelwinkel mit dem entsprechenden Gudermannschen oder sogenannten transzendenten Winkel komplementär ist[5]).

---

1) Diese Zeitschr. 10, 828, 1909.

1) th u bedeutet Tangens hyperbolicus von u, ebenso ch u und sh u Cosinus und Sinus hyperbolicus.

2) Einstein, Jahrbuch der Radioaktivität 4, 420, 1908.

3) Es erinnert an die Hyperbelbewegung bei Born, Ann. d. Phys. 11, 25, 1909.

4) Im Zusammenhange mit den Minkowskischen Anschauungen über Raum und Zeit wird man nun wohl auch dem Büchlein von M. Palágyi, Neue Theorie des Raumes und der Zeit, Leipzig 1901, das ihm gebührende Interesse entgegenbringen.

5) Vgl. Engel-Lobatschefskij, Zwei geometrische Abhandlungen. Leipzig 1898, S. 246.

Schließen die Geschwindigkeiten v_1 und v_2 den Winkel α ein, und ist

$$\frac{v_1}{c} = \operatorname{th} u_1, \quad \frac{v_2}{c} = \operatorname{th} u_2,$$

so trage man vom Punkte O in der Richtung von v_1 die Strecke $OA = u_1$ ab, und setze unter dem Winkel α die Strecke $AC = u_2$ an. Der Resultante entspricht die Strecke $OC = u$. In dem Lobatschefskijschen Dreiecke OAC besteht die Relation

$$\operatorname{ch} u = \operatorname{ch} u_1 \operatorname{ch} u_2 + \operatorname{sh} u_1 \operatorname{sh} u_2 \cos \alpha.$$

Setzt man hierin

$$\operatorname{ch} u_i = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_i}{c}\right)^2}}, \quad \operatorname{sh} u_i = \frac{\frac{v_i}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v_i}{c}\right)^2}},$$

so erhält man nach einigen leichten Umformungen das allgemeine Einsteinsche Additionstheorem der Geschwindigkeiten. Im Falle $\alpha = \frac{\pi}{2}$, wird

$$\operatorname{ch} u = \operatorname{ch} u_1 \operatorname{ch} u_2,$$

oder

$$\operatorname{th}^2 u = \operatorname{th}^2 u_1 + \operatorname{th}^2 u_2 - \operatorname{th}^2 u_1 \operatorname{th}^2 u_2,$$

beziehungsweise

$$v = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 - \left(\frac{v_1 v_2}{c}\right)^2}.$$

Daß diese Addition nicht kommutativ ist, ersieht man leicht aus der ersten Sommerfeldschen Figur, die man jetzt aber als eine Figur in der Lobatschefskijschen Ebene aufzufassen hat. Man hat noch zu setzen

$$OA = BD = u_1, \quad AC = OB = u_2,$$
$$OC = OD = u.$$

In der hyperbolischen Geometrie ist die Summe der Winkel in jedem Dreiecke kleiner als zwei rechte. Es ist also

$$\alpha_1 + \alpha_2 < \frac{\pi}{2},$$

und so fällt OD nicht in die Richtung von OC. Für den Richtungsunterschied $\delta = \sphericalangle COD$ findet man

$$\operatorname{cotg} \delta = \operatorname{tg}(\alpha_1 + \alpha_2) = \frac{\operatorname{th} u_1 \operatorname{sh} u_1 + \operatorname{th} u_2 \operatorname{sh} u_2}{\operatorname{sh} u_1 \operatorname{sh} u_2 - \operatorname{th} u_1 \operatorname{th} u_2}$$
$$= \frac{v_1^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2} + v_2^2 \sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2}}{v_1 v_2 \left(1 - \sqrt{1 - \left(\frac{v_1}{c}\right)^2} \sqrt{1 - \left(\frac{v_2}{c}\right)^2}\right)}.$$

Es ist auch

$$\operatorname{tg} \frac{\delta}{2} = \operatorname{th} \frac{u_1}{2} \operatorname{th} \frac{u_2}{2}.$$

Sind v_1 und v_2 nicht in der xy-Ebene, sondern beliebig im Raume, so kommt man zu sechs Endpunkten, während wir oben nur die Punkte C und D hatten.

Ich will noch an einigen Beispielen zeigen, wie sich die Formeln von Einstein in der Lobatschefskijschen Geometrie reell deuten lassen.

Die Gleichungen (3) im § 5 der erwähnten Einsteinschen Abhandlung bestimmen in bezug auf das ruhende System S die Geschwindigkeitskomponenten u_x, u_y, u_z eines relativ zu S' gleichförmig bewegten Punktes. Ist $u_z = 0$, so wird

$$\frac{u_y}{u_x} = \frac{u_{y'}}{u_{x'} + v} \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Nimmt man $c = \infty$, dann schließt die Gerade, auf der jener Punkt bewegt wird, mit der x-Achse den Winkel λ ein. Bleibt dagegen c endlich und gleich der Fortpflanzungsgeschwindigkeit des Lichtes im leeren Raume, so findet man als Richtungskoeffizienten jener Geraden

$$\operatorname{tg} \lambda' = \frac{\operatorname{tg} \lambda}{\operatorname{ch} u}.$$

Ist u die Hypotenuse und $\frac{\pi}{2} - \lambda$ ein spitzer Winkel im rechtwinkeligen Lobatschefskijschen Dreiecke, so ist λ' der zweite spitze Winkel. Er wird desto kleiner, je größer die Translationsgeschwindigkeit von S' ist. Für $v = c$ hat man $\lambda' = 0$.

Nehmen wir s als die Ausdehnung eines ruhenden Elektrons in der Richtung der x-Achse. Wird es nun mit der Geschwindigkeit v in derselben Richtung fortbewegt, so ist seine verkürzte Ausdehnung

$$s' = \frac{s}{\operatorname{ch} u}.$$

Auf der Abstandslinie $y = u$, welche die x-Achse zur Mittellinie und u zum Parameter hat, messe man von ihrem Durchschnittspunkte U mit der Ordinatenachse angefangen die Länge $UM = s$ ab. Die Abszisse von M ist s'.

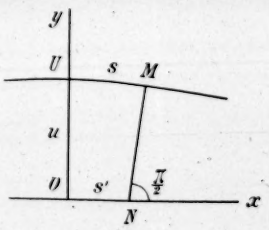


Fig. 1.

Ebenso läßt sich das Zurückbleiben der relativ zu einem Bezugssystem gleichförmig bewegten Uhr interpretieren.

Setzt man weiter

$$\varphi = \Pi(u_1), \quad \varphi' = \Pi(u'_1), \quad \frac{v}{c} = \operatorname{th} u,$$

so erhält man aus der ersten Formel für das Dopplersche Prinzip

$$\nu' = \nu\,(\operatorname{ch} u - \operatorname{th} u_1 \operatorname{sh} u) = \frac{\nu \operatorname{ch}(u - u_1)}{\operatorname{ch} u_1}.$$

Dem Parallelwinkel $\varphi = 0$ entspricht die Länge $u_1 = \infty$, und so wird in diesem Falle

$$\nu' = \nu\, e^{-u}.$$

Es ist also

$$\nu' = \nu\left(1 - u + \frac{u^2}{2!} - \frac{u^3}{3!} + \cdots\right).$$

Für kleine Werte von u kann man die höheren Potenzen vernachlässigen, und dann $\operatorname{th}\frac{v}{c}$ durch $\frac{v}{c}$ ersetzen. Die vorhergehende Formel geht in den Ausdruck für das Dopplersche Prinzip in der gewöhnlichen Mechanik über:

$$\nu' = \nu\left(1 - \frac{v}{c}\right).$$

Man beachte, daß im gestrichenen Bezugssysteme $v' = -v$ ist.

Das Verhältnis der Frequenzen ν und ν' in der Formel $\nu' = \nu e^{-u}$ läßt sich darstellen als das Verhältnis zweier Grenzkreisbögen zwischen zwei gemeinsamen Achsen.

Der Ausdruck für die Aberration wird in

$$\operatorname{th} u'_1 = \operatorname{th}(u_1 - u)$$

transformiert. Es ist also die Aberrationsgleichung

$$u'_1 = u_1 - u.$$

Der Lichtstrahl T, von einer unendlich fernen Lichtquelle kommend, treffe die x-Achse im Punkte M unter dem spitzen Winkel φ. Man trage im Sinne der wachsenden Abszissen die Strecke $MN = u$ ab, und ziehe von N aus die Lobatschefskijsche Parallele zu T. Diese Parallele T' schließt mit der x-Achse den Winkel φ' ein.

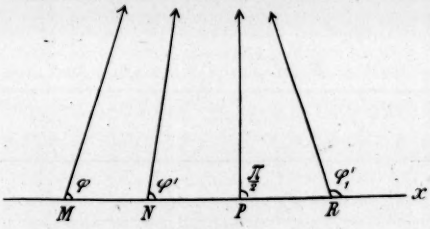


Fig. 2.

Ist $\varphi = \frac{\pi}{2}$, also $u_1 = 0$, so wird $u'_1 = -u$, und der Winkel φ' geht in seinen Supplement φ'_1 über.

Die Formeln der Relativtheorie werden in dieser Auffassung sehr vereinfacht. So z. B. für ein bewegtes Elektron von der Masse μ wird

longitudinale Masse $= \mu \operatorname{ch}^3 u$,
transversale Masse $= \mu \operatorname{ch}^2 u$,

statt[1])

$$\frac{\mu}{\left(\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}\right)^3} \quad \text{und} \quad \frac{\mu}{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Stellt UM (Fig. 1) die longitudinale Masse, so ist ON die transversale.

Krümmungsradius R der Bahn, wenn eine senkrecht zur Geschwindigkeit des Elektrons wirkende magnetische Kraft N vorhanden ist, wird

$$R = \frac{c^2 \mu}{\varepsilon N} \operatorname{sh} u,$$

statt[2])

$$R = c^2 \frac{\mu}{\varepsilon} \cdot \frac{\frac{v}{c}}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \cdot \frac{1}{N}.$$

Ein in gleichförmiger Translationsbewegung in Richtung der wachsenden x-Koordinate befindlicher Körper hat nach der Relativitätstheorie die kinetische Energie

$$K_0 = \mu c^2 \left| \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} - 1 \right|,$$

wobei μ seine Masse im gewöhnlichen Sinne bedeutet[3]). Wir können das einfacher schreiben

$$K_0 = 2\,\mu\, c^2 \operatorname{sh}^2 \frac{u}{2}.$$

Statt $\operatorname{sh}^2 \frac{u}{2}$ kann man auch $\operatorname{tg} \hat{p}$ schreiben, wobei $\hat{p}$ den Flächeninhalt eines Saccherischen zweirechtwinkeligen und gleichschenkeligen Vierecks bedeutet. Seine drei Seiten, welche zwei rechte Winkel einschließen, haben u zur Länge.

Hier wurde vorausgesetzt, daß dieser Körper den äußeren Kräften nicht unterworfen war. Wirken aber auf diesen Körper äußere Kräfte, welche einander Gleichgewicht halten, dem Körper also keine Beschleunigung erteilen, so wird nach Untersuchungen von Einstein[4]) seine kinetische Energie merkwürdigerweise größer um

$$\Delta E = -\frac{\left(\frac{v}{c}\right)^2}{\sqrt{1 - \left(\frac{v}{c}\right)^2}} \Sigma(\xi K_i).$$

Nach unserer Festsetzung geht dieser Ausdruck in

$$\Delta E = -\operatorname{th} u \operatorname{sh} u \, \Sigma(\xi K_i)$$

über. Nehmen wir ein Lobatschefskijsches rechtwinkeliges Dreieck. Sind seine Katheten a

1) Einstein, Ann. d. Phys. **17**, 919, 1905.
2) a. a. O. S. 921.
3) Einstein, Ann. d. Phys. **23**, 374, 1907.
4) Ebenda S. 376.

und b die zu den Parallelwinkeln $\frac{1}{2}\pi - \Pi(u)$ und $\Pi(u)$ gehörigen Strecken, A und B seine spitzen Winkel, so hat man einfach

$$AE = -\operatorname{tg} B \, \Sigma(\xi K_\xi).$$

Aus diesen wenigen Beispielen kann man schon ersehen, welchen Vorteil auch bei rechnerischer Auswertung die nichteuklidische Interpretation der Relativitätsformeln uns gewähren könnte. Für hyperbolische Funktionen haben wir ausgezeichnete Tafeln, die Smithsonian Institution 1909 herausgegeben hat.

Interessant sind jedenfalls die Analogien, die zwischen der Relativitätstheorie und der Lobatschefskijschen Geometrie bestehen. Die Formeln der neueren Mechanik reduzieren sich für $c = \infty$ auf die Formeln der Newtonschen Mechanik. So geht auch die Lobatschefskijsche Geometrie, wenn man eine gewisse Konstante — den sogenannten Krümmungsradius des Raumes — unendlich nimmt, in die euklidische Geometrie über. Für gewöhnliche Geschwindigkeiten unterscheiden sich die Resultate, die nach den Relativitätsformeln berechnet sind, praktisch gar nicht von jenen, die nach gewöhnlichen mechanischen Ausdrücken berechnet sind. So unterscheiden sich für die Strecken von gewöhnlichen Längen die Berechnungen nach der Lobatschefskijschen Geometrie gar nicht von denen nach der euklidischen. In der Relativtheorie existiert eine absolute Geschwindigkeit, in der Lobatschefskijschen Geometrie eine absolute Länge.

In der Relativitätstheorie erleidet jeder Körper bei Bewegung gewisse Deformation. In der Poincaréschen Interpretation der Lobatschefskijschen Geometrie nimmt man als Bogenelement $d\sigma = \frac{ds}{y}$, und dieses kann ohne Deformation nicht bewegt werden usw.

Agram, 8. Januar 1910.

(Eingegangen 19 Januar 1910.)

Die Lösung der Integralgleichung, welche die Fortpflanzungsgeschwindigkeit einer Erdbebenwelle im Innern der Erde mit den Zeiten verbindet, die die Störung gebraucht, um zu verschiedenen Stationen auf der Erdoberfläche zu gelangen.

(The solution of the integral equation which connects the velocity of propagation of an earthquake wave in the interior of the earth with the times, which the disturbance takes to travel to different stations on the earth's surface.)

Von H. Bateman.

Zur Vereinfachung der mathematischen Analysis wollen wir die Erde als eine Kugel vom Halbmesser R behandeln und annehmen, daß die Elastizitätskonstanten der Substanz, aus der sie besteht, in allen Punkten einer konzentrischen Kugelschale dieselben sind.

Es sei v die Fortpflanzungsgeschwindigkeit im Abstande r vom Mittelpunkte; dann ist v eine Funktion von r allein. Wir wollen die von Rudzki[1]) und von Kövesligethy[2]) vorgeschlagene Methode anwenden und annehmen, daß die Strahlen, längs welcher die Energie sich fortpflanzt, Brachystochronen sind. Wir wollen den Erdmittelpunkt als Anfangspunkt wählen und einen Punkt im Innern der Erde durch die Polarkoordinaten (r, θ, φ) bestimmen, wo $\theta = 0$ den Radius zum Epizentrum darstellt. T sei die Zeit, welche die Störung braucht, um vom Epizentrum zum Punkte (r, θ, φ) zu wandern; dann ist nach der allgemeinen Methode von Hamilton[3]) zur Behandlung von Brachystochronenproblemen:

$$\left(\frac{\partial T}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{r\,\partial \theta}\right)^2 = \frac{1}{v^2}. \qquad (1)$$

Setzen wir

$$r = xR$$

und

$$T = SR,$$

so wird die Gleichung:

$$x^2\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial \theta}\right)^2 = \frac{x^2}{v^2}. \qquad (2)$$

Eine Lösung dieser Gleichung erhalten wir, wenn wir

$$\frac{\partial S}{\partial \theta} = \alpha$$

setzen, wo α eine von x und θ unabhängige Größe ist. Das ergibt:

$$x\frac{\partial S}{\partial x} = \pm\sqrt{\frac{x^2}{v^2} - \alpha^2}. \qquad (3)$$

Das negative Vorzeichen muß für die erste Hälfte der Bahn gewählt werden, weil x zunächst abnimmt, wenn S wächst. Das gilt, bis ein Punkt erreicht wird, in welchem der Strahl normal zur Bahn steht. Dieser Radius ist eine Symmetrielinie, und ihr Schnittpunkt mit der Bahn ist ein Wendepunkt der letzteren. Offenbar nimmt nach dem Durchgange durch den Wendepunkt x mit S zu, und wir müssen daher der Quadratwurzel das positive Vorzeichen beilegen.

Wenn wir die Werte für $\frac{\partial S}{\partial \theta}$ und $\frac{\partial S}{\partial x}$ in die Gleichung

1) Beiträge zur Geophysik, III, 1903.
2) Mathem. u. Naturw. Berichte aus Ungarn **13**, 1897; **23**, 1905; vergl. auch Knott, Proc. Roy. Soc. Edinburgh **28**, 1907.
3) Trans. Roy. Irish Acad., 1833

$$dS = \frac{\partial S}{\partial \Theta} d\Theta + \frac{\partial S}{\partial x} dx$$

einsetzen, so erhalten wir:

$$dS = \alpha d\Theta \pm \frac{1}{x}\sqrt{\frac{x^2}{v^2} - \alpha^2}\cdot dx.$$

Wenn $\Theta = 0$ ist, so ist $x = 1$; folglich ist in der ersten Hälfte der Bahn

$$S = \alpha\Theta - \int_1^x \frac{dx}{x}\sqrt{\frac{x^2}{v^2} - \alpha^2}. \qquad (4)$$

Wir erhalten die Gleichung der Bahn, wenn wir $\frac{\partial S}{\partial \alpha}$ einer willkürlichen Konstante gleichsetzen; sonach ist die Gleichung für die erste Hälfte der Bahn:

$$\Theta + \alpha \int_1^x \frac{dx}{x\sqrt{\frac{x^2}{v^2} - \alpha^2}} = \text{const.}$$

Die Konstante ist Null, da $\Theta = 0$ ist, wenn $x = 1$ ist.

Es sei χ der Wert von Θ für die Symmetrielinie und z der zugehörige Wert von x; dann sind (z, χ) die Koordinaten des Wendepunktes, und 2χ ist der Winkel, den der Radius zum Emergenzpunkte mit dem Radius zum Epizentrum bildet. Diese Größen sind untereinander durch die Gleichung

$$\chi = \alpha \int_z^1 \frac{dx}{x\sqrt{\frac{x^2}{v^2} - \alpha^2}} \qquad (5)$$

verbunden. Es sei ψ der Winkel, unter welchem der Radius die Bahn in einem Punkte (x, Θ) schneidet; dann ist

$$\operatorname{cotg}\psi = \frac{1}{x}\frac{dx}{d\Theta} = \pm\sqrt{\frac{x^2}{\alpha^2 v^2} - 1},$$

oder

$$\sin\psi = \frac{\alpha v}{x}. \qquad (6)$$

Somit ist

$$\psi = \frac{\pi}{2},$$

wenn

$$x = \alpha v$$

ist. Der Wert von z wird daher durch die Gleichung

$$z = \alpha v(z) \qquad (7)$$

gegeben.

Wenn e der Winkel ist, den der Strahl bei seinem Austritt mit der Oberfläche bildet, und wenn V der Wert von v an der Erdoberfläche, also für $x = 1$, ist, so erhalten wir:

$$\cos e = \alpha V. \qquad (8)$$

Da e auch der Winkel ist, den die Anfangsrichtung des Strahles mit der Oberfläche bildet, so folgt daraus, daß eine Bahn in irgendeiner gegebenen Ebene einzig und allein durch den Wert von α bestimmt wird.

Der Wert von α für irgendeinen einzelnen Strahl läßt sich aus der Gleichung

$$\alpha = \frac{\partial S'}{\partial \Theta'} \qquad (9)$$

bestimmen. In dieser Gleichung beziehen sich S' und Θ' auf den Punkt an der Oberfläche, an dem der Strahl austritt.

Nun läßt sich S' als Funktion von Θ' aus den Aufzeichnungen verschiedener Erdbebenstationen bestimmen. Wir können daher die Gleichungen

$$\alpha = \frac{\partial S'}{\partial \Theta'}$$

und

$$\Theta' = 2\chi$$

benutzen, um χ als eindeutige Funktion von α zu bestimmen. Setzen wir

$$\chi = f(\alpha)$$

und

$$\beta = \frac{1}{V},$$

so erhalten wir die Integralgleichung:

$$f(\alpha) = \alpha \int_z^1 \frac{dx}{x\sqrt{\frac{x^2}{v^2(x)} - \alpha^2}},$$

aus der $v(x)$ zu bestimmen ist. In dieser Gleichung ist der Wert von $f(\alpha)$ von $\alpha = 0$ bis $\alpha = \beta$ bekannt, und da χ für die unendlich kleine Bahn verschwindet, die nahe beim Epizentrum endet, und für welche

$$e = 0,$$

$$\alpha = \frac{1}{V} = \beta$$

ist, so erhalten wir:

$$f(\beta) = 0.$$

Knott[1], Wiechert und Zoeppritz[2] haben empirische Formeln für die Fortpflanzungszeit T erhalten, indem sie einen einfachen Ausdruck für $v(x)$ annahmen und die zugehörigen Werte von T und $f(\alpha)$ berechneten. Herr Professor Schuster brachte mich auf den Gedanken, daß man vielleicht das umgekehrte Verfahren

1) Proc. Roy. Soc. Ediburgh **28**, 3, 1907.
2) Götting. Nachr. 1907, Heft 4.

einschlagen und die richtige Form der Funktion $v(x)$ aus den bekannten Werten von $f(\alpha)$ ableiten könnte. Das Verfahren läßt sich tatsächlich folgendermaßen ausführen: Setzen wir

$$\frac{x}{v(x)} = \eta,$$

so wird die Integralgleichung:

$$f(\alpha) = \alpha \int_{\alpha}^{\beta} \frac{\frac{d}{d\eta}(\log x)\, d\eta}{\sqrt{\eta^2 - \alpha^2}}.$$

Diese Gleichung läßt sich durch die Substitutionen

$$\eta^2 = \frac{1}{t}$$

und

$$\alpha^2 = \frac{1}{s}$$

auf eine bekannte Integralgleichung zurückführen, die Abel[1]) im Jahre 1823 gelöst hat. Die Lösung wird durch die Formel[2])

$$\frac{d}{d\eta}(\log x) = -\frac{2}{\pi}\frac{d}{d\eta}\int_{\eta}^{\beta} \frac{f(\alpha)\, d\alpha}{\sqrt{\alpha^2 - \eta^2}}$$

gegeben. Dadurch sind wir imstande, $\frac{d}{d\eta}(\log x)$ als Funktion von η zu bestimmen: es sei

$$\frac{d}{d\eta}(\log x) = H(\eta). \qquad (11)$$

Eliminieren wir η aus dieser Gleichung und der Gleichung

$$\eta = \frac{x}{v(x)},$$

so erhalten wir v als Funktion von x.

Um die Anwendung der Formel zu erläutern, wollen wir den Fall

$$S' = -0{,}4 + 6{,}1\left(\frac{\Theta'}{30}\right) - 0{,}5\left(\frac{\Theta'}{30}\right)^2$$

untersuchen. Es ergibt sich eine Reihe von Werten für S, die sich nur wenig von den beobachteten Werten unterscheiden. In der folgenden Tabelle I sind die Zeiten in Minuten

Tabelle I.

Winkel	Milne	Formel
30°	5,2	5,2
60°	9,8	9,8
90°	13,1	13,4
120°	15,3	16
150°	17	17,6
180°	18	18,2

1) Collected Works (Sylow u. Lie) 1, 11.
2) Eine strenge Diskussion der Abelschen Gleichung findet sich bei Böcher: Introduction to the study of integral equations.

gemessen, und die beobachteten Zeiten sind die von Milne und Benndorf angegebenen Werte für die erste Phase des Vorbebens[1])

Setzen wir

$$\frac{\pi\Theta'}{180^0} = 2\chi,$$

so daß die Winkel auf Bogenmaß reduziert werden, so erhalten wir:

$$T = RS' = -0{,}4 + 6{,}1\left(\frac{12\chi}{\pi}\right) - \frac{72}{\pi^2}\chi^2$$

und

$$2\alpha = \frac{\partial S'}{\partial \chi} = \frac{12}{\pi R}\left[6{,}1 - \frac{12\chi}{\pi}\right].$$

Folglich ist

$$x = f(\alpha) = \frac{\pi^2}{72R}(\beta - \alpha),$$

wo

$$\beta = \frac{36{,}6}{\pi R}$$

ist.

Die Formel ergibt:

$$\log x = -\frac{\pi}{36}\left[\beta\, \mathfrak{Cof}.^{-1}\left(\frac{\beta}{\eta}\right) - \sqrt{\beta^2 - \eta^2}\right],$$

wo

$$\eta = \frac{x}{v(x)}$$

ist.

Die Geschwindigkeit an der Erdoberfläche ist gegeben durch

$$V = \frac{1}{\beta} = \frac{6370\,\pi}{36{,}6}\ \text{km/min} = 9{,}1\ \text{km/sec}.$$

Dieser Wert ist ein wenig höher als die gewöhnliche Schätzung[2]). Die Werte für v im Erdinnern sind in folgender Tabelle II angegeben; sie sind alle nahezu 12 km/sec, also ungefähr von der richtigen Größenordnung.

Tabelle II.

x	$\frac{v}{V}$
1	1
0,906	1,1324
0,893	1,1912
0,738	1,2308
0,660	1,2940
0,498	1,2945
0,367	1,3108
0,2887	1,3153
0,1381	1,3156
0,0528	1,2949
0,0259	1,284

1) C. G. Knott, The Physics of Earthquake phenomena, S. 244.
2) C. G. Knott, The Physics of Earthquake phenomena, S. 248.

Das vorstehende Beispiel stützt sich auf eine rohe Annäherung an die beobachteten Werte der Zeit; infolgedessen sind die gewonnenen Werte für die Geschwindigkeit nicht ganz zuverlässig. Es ist indessen interessant, zu bemerken, daß sich eine gewisse Andeutung eines Maximums in der Nähe des Erdmittelpunktes findet. Das stimmt mit einer Hypothese überein, die Nagaoka[1]) aufgestellt hat.

1) Phil. Mag. (5) **50**, 53—68, 1900.

Manchester, Universität.

(Nach dem Manuskript aus dem Englischen übersetzt von Max Iklé.)

(Eingegangen 24. Dezember 1909.)

Über die Verteilung der Intensität bei der Emission von Röntgenstrahlen.

Von A. Sommerfeld.

Meine Erwiderung auf die Bemerkungen von Herrn J. Stark[1]) zu meiner gleich betitelten Note[2]) knüpfe ich an die Zusammenfassung am Schluß seiner Bemerkungen an.

1. Selbstverständlich nimmt bei meiner Auffassung (Bremstheorie oder Impulstheorie der Röntgenstrahlen) die Energiedichte von der Emissionsstelle aus wie $1/r^2$ ab. Hierin unterscheidet sich meine (d. h. die übliche) Auffassung von der Starkschen Lichtquantenhypothese.

2. Die Ionisierungsmethode ist deshalb befriedigender wie die photographische Methode, weil sie auch auf härtere Strahlen reagiert, für die die photographische Schicht unempfindlich ist, indem sie sie nicht genügend absorbiert. So haben Haga und Baßler die Polarisation der primären Röntgenstrahlen photographisch nicht nachweisen können, während dies Barkla und Baßler mit der Ionisierungsmethode gelungen ist. Ob die Ionisierung ein streng proportionales Maß der Intensität liefert, kann natürlich bezweifelt werden. Es sei aber bemerkt, daß Angerer[3]) eine sehr gute Proportionalität zwischen dem Ionisierungsstrom und der bolometrisch gemessenen Wärmewirkung der Röntgenstrahlen gefunden hat.

3. Was die vorläufigen Beobachtungen von Kaye angeht, so erweist sich die von Herrn Stark vorausgesetzte Fehlerquelle dadurch als unmaßgeblich, daß Herr Kaye eine Steigerung der Unsymmetrie durch dazwischen gestellte *Al*-Schirme nachweist; diese müßten die Unsymmetrie verringern, wenn die Starksche Mutmaßung richtig wäre, daß die Unsymmetrie zum erheblichen Teil von nicht absorbierten primären Kathodenstrahlen herrühre.

4. Wenn Herr Stark schreibt, ich wäre im Irrtum, zu glauben, daß die Baßlerschen Beobachtungen viel weniger durch die Absorption in der Glaswand beeinträchtigt würden wie die Messungen der Gesamtintensität, so kann dies nur auf einer unvollständigen Kenntnis der Baßlerschen Arbeit beruhen. Daselbst wird gezeigt, daß die Hinzufügung von 2 mm Glas[1]) die prozentische Polarisation nicht beeinflußt und daß erst stärker absorbierende Medien[2]) eine kleine Erhöhung der prozentischen Polarisation bewirken. Die Dickenunterschiede in den Baßlerschen Röhren betragen etwa 1 mm, sind also belanglos, soweit man überhaupt von Beobachtungen außerhalb der Röhre auf die Vorgänge in der Röhrenwand zurückschließen darf.

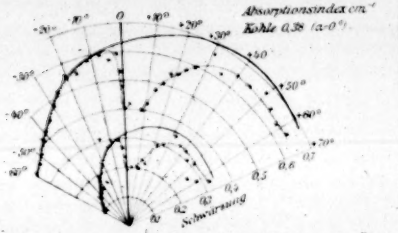
Da Herr Stark meine Bemerkungen über „Polarisations-“ und „Intensitätsmessungen“ schwer verständlich findet, sei folgendes hinzugefügt: Bei den prozentischen Polarisationsmessungen handelt es sich um das Verhältnis des polarisierten Anteils der Intensität zur Gesamtintensität, bei den Intensitätsmessungen um die Gesamtintensität selbst. In letzterer kommt die Absorption wegen ungleichförmiger Dicke der Glaswand zum vollen Ausdruck, in dem ersteren Verhältnis hebt sie sich zum großen Teil, bei Glas fast vollständig, heraus.

Die zugehörigen Formeln hat Herr Stark selbst hingeschrieben[3]). Aus ihnen geht hervor, daß für die verhältnismäßige Polarisation die Differenz der durchschnittlichen Absorptionskoeffizienten der polarisierten und unpolarisierten Strahlung in Frage kommt, für die absolute Intensität aber die Größe der Koeffizienten selbst. Jene Differenz ist natürlich viel kleiner als diese Koeffizienten.

5 und 6. Herr Stark hält die Lage des Maximums bei 40^0 in der oberen Kurve der aus seiner Arbeit übernommenen beigedruckten Figur auf $\pm 5^0$ für gesichert. Mir ist dieser von Herrn Stark beanspruchte Genauigkeitsgrad völlig unverständlich. Man bedenke, wie empfindlich ein so flaches Maximum gegen kleine Verschiebungen der Kurvenpunkte ist. Die eingezeichneten Beobachtungspunkte müßten auf 1 bis 2 Proz. genau sein, wenn das Maximum auf $\pm 5^0$ festliegen sollte. Dabei beträgt der Fehler des Kurvenpunktes bei 30^0, gemessen

1) J. Stark, diese Zeitschr. **11**, 24, 1910.
2) A. Sommerfeld, diese Zeitschr. **10**, 969, 1909.
3) E. Angerer, Ann. d. Phys. **21**, 112, 1906, Tafel IV, Fig. XV.

1) § 60 der ursprünglichen Dissertation oder S. 828 in dem Abdruck Ann. d. Phys. **28**, 1909.
2) § 61 der Dissertation, § 26 des Abdrucks in den Annalen.
3) Diese Zeitschr. 11, 28, 1910. Es handelt sich um die Formeln für R_x, R_u und R_x', R_u'.



Aufnahme im Innern der Röhre. Strahlung durch 0,9 bez. 0,8 mm Alum.
Schwärzungskurven ..... beobachtet, —— Kohleabsorpt. korrig.

gegen die gemittelte Starksche Kurve, schon vier Einheiten auf 60 Einheiten des ganzen Wertes, also 7 Proz.

Es kommt hinzu, daß die fraglichen Kurvenpunkte aus einer für die Genauigkeit recht bedenklichen Differenzmessung hervorgegangen sind zwischen der beobachteten Schwärzung und der Schwärzung „infolge von Schleier und diffuser Sekundärstrahlung". Letztere ist konstant zu 1,10 angesetzt, erstere ist im Durchschnitt 1,60 (Minimum 1,42, Maximum 1,77). Die Reduktion beträgt also $^2/_3$ des Beobachtungswertes. Dazu kommt die Unsicherheit der Korrektion wegen der Antikathodendicke, bei der mit einem einheitlichen Absorptionskoeffizienten des Röntgenstrahlbündels gerechnet werden muß. Ferner, wie hat Herr Stark seine Kassette im Innern der Röntgenröhre zentriert? Wenn der Mittelpunkt des Films von der mittleren Lage des Brennflecks nur um 6 mm, d. h. um $^1/_{10}$ des Radius, absteht, so bedeutet das einen Fehler in der beobachteten Schwärzung um 20 Proz. Wie verträgt sich dies mit der von Herrn Stark beanspruchten Genauigkeit von 1 bis 2 Proz. für die reduzierten Kurvenpunkte?

Nach diesen Überlegungen kann ich auch der von Herrn Stark betonten verhältnismäßig starken Intensität im Gebiete 20° bis 30° keine objektive Bedeutung beimessen; vielmehr glaube ich im Recht gewesen zu sein, wenn ich von den Starkschen Kurven sagte, „daß sie wohl nur qualitative Bedeutung beanspruchen können".

Übrigens scheint sich Herr Stark bei der Korrektion wegen Absorption in der Antikathode gerade in der Nähe des Maximums verrechnet zu haben. Ich habe diese Korrektion nach den Angaben von Herrn Stark kontrolliert: Absorptionskoeffizient 0,38 cm^{-1}, Dicke der Antikathode 0,2 cm; Dicke bei 30° $0{,}2/\cos 60° = 0{,}4$ cm, Korrektion:

$$e^{0{,}38 \cdot 0{,}4} = e^{0{,}15} = 1 + 0{,}15 + \frac{1}{2}\,0{,}02 = 1{,}16.$$

Nach der gestrichelten Kurve der Figur möge als gemessene Intensität bei 30° gelten 0,62; die korrigierte wird dann

$$0{,}62 \cdot 1{,}16 = 0{,}72,$$

d. h. nicht merklich verschieden von der in der Figur eingezeichneten Intensität für 40°. Bei Verbesserung dieses Rechenfehlers kann man also das Maximum um 10° nach links verlegen. Ich führe dieses an, nicht weil ich auf die dadurch hergestellte bessere Übereinstimmung mit dem für $\beta = {}^1/_3$ von mir berechneten theoretischen Maximum irgendwelchen Wert lege, sondern lediglich um die mir unverständliche Genauigkeitsangabe $\pm 5°$ für das Maximum zu beleuchten.

7. Ich gebe zu, daß mit der Starkschen Lichtquantenhypothese, die natürlich gut von den Einsteinschen Anwendungen des Planckschen Wirkungsquantums zu unterscheiden ist, jeder Grad von Unsymmetrie verträglich ist, weil diese Hypothese überhaupt nicht quantitativ ausgearbeitet ist. Die Fig. 1 der ursprünglichen Arbeit von Herrn Stark, auf die er sich auch jetzt bezieht, ist rein nach Gefühl gezeichnet, indem über die sukzessiven Längen der Kathodenstrahlpfeile 1 bis 7 willkürlich disponiert wurde. Mit demselben Recht hätte Herr Stark auch die Pfeile 1 bis 7 für die Röntgenstrahlen (die wohl die Anzahl der in der betreffenden Richtung emittierten Lichtquanten messen sollen?) nach einem willkürlichen Emissionsgesetz wählen und diejenigen für die reflektierten Kathodenstrahlen nach dem Parallelogramm konstruieren können. Was uns bei der ganzen Frage interessiert, die Abhängigkeit der Emission vom Azimut, bleibt in der Starkschen Lichtquantenhypothese quantitativ vollkommen unbestimmt. Hat es unter diesen Umständen überhaupt noch einen Sinn, von einem Vergleich der Beobachtungskurven mit der Lichtquantenhypothese zu sprechen?

8. Im letzten Punkte kann ich Herrn Stark zustimmen. Die Emission sekundärer Kathodenstrahlen von annähernd derselben Geschwindigkeit wie die der auffallenden ist, wie oft hervorgehoben, eine Schwierigkeit für die gewöhnliche Theorie der Röntgenimpulse, die nur überwunden werden kann, wenn man in der Lage ist, das Verhalten des emittierenden Atoms näher in Rechnung zu ziehen. Vielleicht kann eine Betrachtung von J. J. Thomson, entsprechend ausgebaut, zur Lösung dienen[1]).

Diese Schwierigkeit soll uns aber meiner Meinung nach nicht abhalten, den Emissionsvorgang der primären Röntgenstrahlen (bezw. ihres polarisierten Anteils) quantitativ zu verstehen. Auf der Basis der zurzeit völlig unbestimmten Starkschen Lichtquantenhypothese ist dies völlig unmöglich; Herr Stark hat nichts vorgebracht, was meine Hoffnung widerlegte,

1) Elektrizitätsdurchgang durch Gase, § 138 Schluß.

daß es auf der Basis der gewöhnlichen Maxwellschen Theorie geschehen könne.

Zum Schluß muß ich leider, in einer Art persönlicher Bemerkung, noch einmal auf die Starksche „Ätherwellenhypothese" zurückkommen, weil mir Herr Stark eine historisch unrichtige Darstellung derselben vorwirft.

Die Frage, die Herr Stark experimentell entscheiden wollte, war doch diese: Ist die unsymmetrische Emission der Röntgenstrahlen mit der gewöhnlichen Theorie des elektromagnetischen Feldes vereinbar oder erfordert sie eine Erweiterung derselben im Sinne der Lichtquantenhypothese? Hierbei ist es nötig, aus der Maxwellschen Theorie die richtigen Konsequenzen zu ziehen, die ich in meiner Arbeit zusammengestellt habe. Die „Ätherwellenhypothese" mit ihrer allseitig gleichen Emission ist eine falsche Konsequenz der Theorie, die von niemandem außer Herrn Stark publiziert worden ist und die Herr Stark daher gar nicht nötig hatte zu bekämpfen. Auf diese, nicht auf die Lichtquantenhypothese, die ja bewußterweise über die Maxwellsche Theorie hinausgeht, bezieht sich meine Aussage, daß „die Anschauungen des Herrn Stark" (genauer gesagt, seine Anschauungen über die Konsequenzen der elektromagnetischen Theorie) „mit dieser Theorie unvereinbar sind". Wenn Herr Stark jetzt[1]) die allseitig gleiche Emission als einen „experimentell und theoretisch unhaltbaren Zusatz zur Ätherwellenhypothese" fallen läßt, so bleibt von jener Hypothese nichts übrig, was sie zur Entscheidung der vorliegenden Frage über die unsymmetrische Emission der Röntgenstrahlen befähigen könnte.

Es scheint mir zu unfruchtbar, auf die Einzelheiten der diesbezüglichen Erwiderung von Herrn Stark weiter einzugehen; die Leser dieser Zeitschrift, die sich für den Gegenstand interessieren sollten, können sich aus der Definition[2]), die Herr Stark am Eingange seiner ursprünglichen Arbeit von seiner „Ätherwellenhypothese" gibt, aus meiner hierauf fußenden Äußerung[3]) und aus der etwas künstlich zergliederten Umschreibung[4]) derselben Hypothese in der Starkschen Erwiderung leicht ein eigenes Urteil bilden. Jedenfalls muß ich den Vorwurf einer historisch unrichtigen Darstellung meinerseits energisch zurückweisen.

1) Diese Zeitschr. 11, 25, 1910.
2) Diese Zeitschr. 10, 902, 1909.
3) Diese Zeitschr. 10, 970, 1909.
4) Diese Zeitschr. 11, 25, 1910

(Eingegangen 21. Januar 1910.)

Über das Absorptionsgesetz der β-Strahlung.

Eine Erwiderung auf die Einwände von Herrn O. Hahn und Fräulein L. Meitner.

Von W. Wilson.

Herr O. Hahn und Fräulein L. Meitner[1]) haben in einer vor kurzem in dieser Zeitschrift erschienenen Notiz gewisse Einwände erhoben gegen die Schlüsse, zu denen ich auf Grund einer experimentellen Arbeit über die Beziehung zwischen Geschwindigkeit und Absorption von β-Strahlen gelangte[2]).

Die strittigen Punkte mögen zunächst kurz auseinandergesetzt werden. In meinen Versuchen wurden β-Strahlen von annähernd gleicher Geschwindigkeit durch ein Magnetfeld aus der von Radium ausgesandten inhomogenen Strahlung ausgeblendet. Das Absorptionsgesetz der Strahlung wurde dann durch Messung der in einem Elektroskop erzeugten Ionisation bestimmt. Es zeigte sich, daß die Absorption nicht nach einem Exponentialgesetz vor sich ging, wie früher allgemein angenommen wurde, sondern vielmehr mit guter Annäherung nach einem linearen Gesetz erfolgte. Dieses Absorptionsgesetz erwies sich als gültig für alle Geschwindigkeiten der β-Strahlen, für die Messungen ausgeführt wurden.

Außerdem habe ich einige Versuche beschrieben, aus denen hervorgeht, daß β-Strahlen beim Durchgang durch Materie einen Geschwindigkeitsverlust erleiden.

Andererseits ist von Hahn und Meitner in einer Reihe von wertvollen Untersuchungen gezeigt worden, daß die β-Strahlen eines einheitlichen radioaktiven Produktes stets nach einem Exponentialgesetz absorbiert werden, und dieses Resultat hat auch zur Auffindung neuer radioaktiver Produkte geführt. Nach Hahn und Meitner kann das exponentielle Absorptionsgesetz, das sie bei einheitlichen Substanzen stets bestätigt fanden, nur durch die Annahme erklärt werden, daß die β-Strahlung homogen ist und daß eine Geschwindigkeitsabnahme beim Durchgang durch Materie nicht stattfindet.

Dagegen habe ich aus meinen Versuchen geschlossen, daß gerade das exponentielle Absorptionsgesetz ein Zeichen für inhomogene Strahlen ist. Es läßt sich leicht zeigen, daß inhomogene Strahlen nach einem exponentiellen Gesetz absorbiert werden können, wenn die Absorption von homogenen Strahlen linear erfolgt. Man hat nur eine einfache Annahme über die Verteilung der Geschwindigkeit auf die β-Teilchen des inhomogenen Bündels zu machen.

Im Verlauf meiner Versuche habe ich Gelegenheit genommen, eingehend den etwaigen

1) Diese Zeitschr. 10, 948, 1909.
2) Proc. Roy. Soc. 82, 612, 1909.

Einfluß der speziellen Versuchsanordnung zu prüfen. Auch die Punkte, die von Hahn und Meitner angeführt werden, sind eingehend in Betracht gezogen worden, und die Resultate wurden nicht eher veröffentlicht, bis Versuche verschiedener Art mich von der Richtigkeit meiner Schlußfolgerungen überzeugt hatten.

Ich komme nun zum ersten Einwand, der von Hahn und Meitner gegen meine Versuche gemacht wurde. Es wird angeführt, daß die zur Untersuchung kommenden Strahlen nicht völlig homogen waren und daß gerade darin der Grund liege, daß ein lineares Absorptionsgesetz gefunden wurde.

Es läßt sich freilich in Praxis bei der Versuchsanordnung nicht vermeiden, daß die Geschwindigkeit der β-Strahlen innerhalb gewisser Grenzen variiert. Doch habe ich seit Veröffentlichung meiner Arbeit die Messungen auf β-Strahlen ausgedehnt, die viel homogener waren. Diese Versuche haben gezeigt, daß das lineare Absorptionsgesetz in diesem Falle sogar mit noch größerer Genauigkeit sich bestätigt als unter den früheren experimentellen Bedingungen. Aber selbst abgesehen von diesem experimentellen Resultate läßt es sich in einfacher Weise zeigen, daß eine ganz beliebige Mischung homogener β-Strahlgruppen nie nach einem linearen Gesetze absorbiert werden kann, wenn die Absorption jeder einzelnen Gruppe nach einem Exponentialgesetze erfolgt. Denn wenn man die Logarithmen der im Elektroskop gemessenen Ionisationsströme aufträgt als Funktion der Dicke der absorbierenden Substanz, so müßte die Kurve in diesem Fall konvex gegen den Nullpunkt des Koordinatensystems sein. In meinen Versuchen aber zeigt diese Kurve stets eine ausgesprochene konkave Krümmung. Es ist somit unmöglich, das lineare Absorptionsgesetz auf Grund derartiger Betrachtungen zu erklären.

Als zweiter Einwand wird angeführt, daß bei meiner Versuchsanordnung infolge Zerstreuung der β-Strahlen der beobachtete Ionisationsstrom viel rascher abnahm, als dem Exponentialgesetz entspräche.

Ich bin auf diesen Punkt in meiner Arbeit eingehend zu sprechen gekommen (Seite 617). Dort wurde ausgeführt, daß ein Aktiniumpräparat unter das Elektroskop gebracht und das Absorptionsgesetz für die ausgesandten β-Strahlen bestimmt wurde. Es ergab sich ein exponentielles Absorptionsgesetz mit einem Absorptionskoeffizienten 30 cm^{-1}. Dieser Wert stimmt mit dem überein, den man erhält, wenn die Absorption in der gewöhnlichen Weise gemessen wird. Nun fielen aber die β-Strahlen des Aktiniums in nahezu derselben Weise auf den absorbierenden Schirm auf, als wie bei den Versuchen, die ein lineares Absorptionsgesetz ergaben. Wenn daher der Einwand von Hahn und Meitner berechtigt wäre, daß nämlich die Zerstreuung der Strahlen der Grund für das lineare Absorptionsgesetz ist, so hätte sich auch für Aktinium ein solches Gesetz ergeben müssen.

Der dritte Einwand, der gemacht wurde, betrifft die wichtige Frage, ob β-Strahlen beim Durchgang durch Materie einen Geschwindigkeitsverlust erleiden oder nicht.

Es ist nötig, diesen Punkt eingehend zu besprechen, da Hahn und Meitner meine diesbezüglichen Versuche im einzelnen diskutieren.

Meine Versuchsanordnung ist aus Fig. 2 meiner Arbeit ersichtlich und ist auch in der Erwiderung von Hahn und Meitner als Fig. 1 wiedergegeben. β-Strahlen des aktiven Niederschlags der Radiumemanation wurden durch ein Magnetfeld ausgeblendet und gelangten in das Elektroskop E. Es wurde dann die Intensität der im Elektroskop erzeugten Ionisation für verschiedene Stärken des magnetischen Feldes gemessen. Die Kurve, die erhalten wurde, ist in Fig. 2 (Hahn und Meitner) bezw. Fig. 11 (Wilson) wiedergegeben (Kurve a). Aluminiumfolien von 0,489 mm bzw. 1,219 mm Dicke wurden dann direkt unter dem Elektroskop in den Strahlengang eingeschaltet und wieder die Ionisation in Abhängigkeit von der Feldstärke bestimmt. Diese Kurven sind in der Figur als b und c bezeichnet. Wenn aber die Folien an der mit J bezeichneten Stelle eingeschaltet wurden, so daß also die Strahlen zuerst diese Folien zu durchdringen hatten, und dann in das Magnetfeld eintraten, so wurden die mit d und e bezeichneten Kurven erhalten.

Hahn und Meitner schließen nun, daß keine Geschwindigkeitsänderung der Strahlen stattfindet, weil die Maxima der Kurven a, d und e für nahezu dieselbe magnetische Feldstärke eintreten.

Ich bin nicht in der Lage, die Gründe erkennen zu können, die zu einer derartigen Schlußweise berechtigen. Anscheinend haben Hahn und Meitner die verschieden starke Absorption der langsamen und schnellen β-Strahlen nicht in Betracht gezogen. Die Verschiebung des Maximums hängt von zwei Faktoren ab, erstens von der Geschwindigkeitsänderung der Strahlen, und zweitens von der ungleichen Absorption, die für die langsamen Strahlen größer ist als für die schnelleren. Der erste Faktor bewirkt eine Verschiebung des Maximums nach der Seite der geringeren Feldstärke, der zweite eine solche nach der Seite der größeren Feldstärke. Wenn daher die Absorptionsfolien an die Stelle J gebracht werden, so erhalten wir den gemeinsamen Effekt der beiden Faktoren,

und wenn die Folien unmittelbar unter das Elektroskop gebracht werden, so ist nur die Absorption allein von Einfluß. Falls also keine Änderung der Geschwindigkeit stattfände, müßte man in beiden Fällen identische Kurven erhalten.

Wir wollen nun noch in derselben Weise wie Hahn und Meitner zwei Strahlengruppen von den Intensitäten J_1 bezw. J_2 betrachten, wobei wir die Annahme machen, daß die Strahlen der Gruppe J_1 leichter absorbiert werden als die Strahlen der Gruppe J_2. Für eine gewisse Stärke des Magnetfeldes besitze die Intensität der Strahlung, die von Gruppe J_1 herrührend auf die Öffnung des Elektroskopes auffällt, den Wert $\alpha_1 J_1$, wobei α_1 von der Geschwindigkeit der Strahlen, von den geometrischen Bedingungen der experimentellen Anordnung und von der Feldstärke allein abhängt. Wenn nun eine Folie unmittelbar vor dem Elektroskop in den Strahlengang gebracht wird, so ist die durchgelassene Strahlung $\beta_1 \alpha_1 J_1$, wobei β_1 nur von der Absorbierbarkeit dieser Strahlen abhängt. In ähnlicher Weise ist die durchgelassene Intensität der zweiten Strahlengruppe $\beta_2 \alpha_2 J_2$, und folglich die Gesamtintensität, die im Elektroskop zur Messung gelangt, $\alpha_1 \beta_1 J_1 + \alpha_2 \beta_2 J_2$.

Bringt man nun aber die Folie bei J derartig in den Strahlengang, daß die Strahlen zuerst die Folie durchdringen und dann in das Magnetfeld eintreten, so ist die Intensität der beiden Gruppen beim Eintritt in das Feld $\beta_1 J_1$ bzw. $\beta_2 J_2$. Wenn nun die Geschwindigkeit sich beim Durchgang durch die Materie nicht verringert und das Magnetfeld ungeändert bleibt, so treten diese Strahlen mit den Intensitäten $\alpha_1 \beta_1 J_1$ und $\alpha_2 \beta_2 J_2$ in das Elektroskop ein. Die Gesamtintensität ist also gleich $\alpha_1 \beta_1 J_1 + \alpha_2 \beta_2 J_2$. Das ist genau derselbe Wert, der im ersten Falle erhalten wurde, wo die Folie unmittelbar unter dem Mikroskop eingeschoben war. Die beiden Kurven müßten daher zusammenfallen, wenn keine Geschwindigkeitsänderung stattgefunden hat. Hat sich aber die Geschwindigkeit verringert, so muß das Maximum für die Kurven, bei denen die Folie sich an der Stelle J befand, für geringere Feldstärken eintreten als für die Kurven, wo die Folie unmittelbar unter dem Elektroskop eingeschaltet war.

Diese Verschiebung des Maximums und damit die Änderung der Geschwindigkeit ist durch die Versuche erwiesen worden.

Am Ende ihrer Erwiderung bemerken Hahn und Meitner:

„Hätte Wilson die Versuche im magnetischen Felde mit homogenen β-Strahlen ausgeführt, so hätte er überhaupt keine Verschiebung des Maximums gefunden."

Während der letzten Monate habe ich weitere Versuche in dieser Richtung ausgeführt und folgendes gefunden. Wenn man homogene β-Strahlen durch ein Magnetfeld ausblendet und dann ihre Geschwindigkeit in einem zweiten Magnetfeld mißt, so zeigt sich eine Verschiebung des Maximums nach der Seite der geringeren Feldstärke, wenn Folien in den Strahlengang zwischen den beiden Magnetfeldern eingeschaltet werden. Werden dagegen Folien unmittelbar unter das Elektroskop gebracht, so zeigt sich so gut wie keine Verschiebung des Maximums. Das beweist, daß die Strahlen nahezu homogen waren. Die Geschwindigkeitsabnahme selbst war genau von der Größe, die nötig ist, um den Absorptionskoeffizienten in der durch das lineare Absorptionsgesetz bestimmten Weise zu ändern.

Hahn und Meitner führen außerdem als Stütze ihrer Versuche eine Arbeit von Makower[1]) an, in der gezeigt wird, daß man dasselbe Absorptionsgesetz erhält, gleichgültig, ob man die Ionisation mißt oder die Zahl der austretenden β-Teilchen. Dieser Versuch zeigt nur, daß die Absorption der β-Strahlen in einer vollständigen Hemmung eines gewissen Teils der β-Teilchen besteht; er kann jedoch nicht als Stütze für die eine oder andere der oben besprochenen Ansichten angeführt werden.

Auch die Versuche von H. W. Schmidt, die als Beweis dafür angeführt werden, daß die Geschwindigkeit der β-Strahlen sich nicht ändert, sind, wie ich schon früher gezeigt habe, nicht stichhaltig. Es ist von Interesse, hier darauf hinzuweisen, daß Schmidt[2]) selbst in einer neuen Arbeit zu dem Schluß gelangt, daß die Geschwindigkeit der Strahlen beim Durchgang durch Materie abnimmt.

Außerdem möchte ich noch folgenden Punkt anführen. Nach der Hypothese von Hahn und Meitner würden die Strahlen von Radium B und C aus einer Reihe von Strahlengruppen bestehen, wobei jeder Gruppe eine bestimmte Geschwindigkeit zukäme. Man sollte dann erwarten, daß die photographischen Aufnahmen von Kaufmann und Bucherer eine Reihe von Banden zeigen würden und nicht, wie es in der Tat der Fall war, eine kontinuierliche Intensitätsänderung von einer Geschwindigkeit zur benachbarten.

Die Differenz zwischen der von Hahn und Meitner entwickelten Ansicht und meiner eignen besteht nicht in einem Unterschied in den experimentellen Resultaten selbst, sondern vielmehr in einem Unterschied in der Interpretation der Resultate. Ich selbst bin überzeugt, daß homogene β-Strahlen nicht nach einem Exponential-

1) Phil. Mag. **17**, 171, 1909.
2) Diese Zeitschr. **10**, 929, 1909.

gesetz absorbiert werden und ferner, daß die Geschwindigkeit der β-Strahlen beim Durchgang durch Materie eine deutliche Abnahme erfährt.

Physikalisches Institut der Universität Manchester.

(Eingegangen 6. Januar 1910.)

Berichtigung.

In dem Artikel des Herrn P. Zeeman, Der Grad der Vollkommenheit der zirkularen Polarisation magnetisch zerlegter Linien, diese Zeitschr. 11, 1, 1910, soll auf S. 7, linke Spalte, Z. 36 v. o. hinter Absorptionsbanden folgen: „der Verbindungen der seltenen Erden" und Zeile 40 sollen diese Wörter gestrichen werden.

Tagesereignisse.

Der **Verband Deutscher Elektrotechniker** hält in der Zeit vom 25. bis 28. Mai 1910 in Braunschweig seine XVIII. Jahresversammlung ab. Der Gewohnheit der letzten Jahre entsprechend, wird auf jeder Versammlung ein besonderes Thema behandelt, und zwar diesmal „Die Elektrizität in der Landwirtschaft und ihre Beziehung zu den Überlandzentralen".

Leonhardi Euleri opera omnia. Herausgegeben von der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft unter Redaktion von F. Rudio, A. Krazer und P. Stäckel. 43 Bände, zu je etwa 60 Bogen. 4 Subskriptionspreis für jeden Band n. M. 20.—. Nach Erscheinen des ersten Bandes tritt eine Erhöhung des Bandpreises ein. Der erste Band, Algebra, herausgegeben von Heinrich Weber, wird voraussichtlich Ende 1910 erscheinen, das ganze Werk in etwa 10—12 Jahren vollendet sein.

Erste Reihe: Reine Mathematik.

A. Arithmetik und Algebra (5 Bände).

I. Anleitung zur Algebra, 1 Band.
II. Arithmetische Abhandlungen, 3 Bände.
III. Algebraische Abhandlungen
IV. Wahrscheinlichkeitsrechnung; Versicherungswesen } zusammen 1 Band.

B. Analysis (11 Bände).

I. Lehrbücher, 4 Bände.
II. Reihen, Produkte und Kettenbrüche, 2 Bände.
III. Integrale:
Erste Abteilung, 2 Bände.
Zweite Abteilung, Elliptische Integrale, 1 Band.
IV. Differentialgleichungen, 1 Band.
V. Variationsrechnung, 1 Band.

C. Geometrie (2 Bände).

I. Elementare Geometrie; Trigonometrie; algebraische Kurven
II. Anwendungen der Differential- und Integralrechnung auf die Geometrie } zusammen 2 Bände.

Zweite Reihe: Mechanik; Astronomie.

A. Mechanik (11 Bände).

I. Lehrbücher, 2 Bände.
II. Prinzipien der Mechanik
III. Mechanik materieller Punkte } zusammen 1 Band.
IV. Mechanik starrer Körper, 1 Band.
V. Mechanik biegsamer und elastischer Körper, 2 Bände.
VI. Mechanik flüssiger und luftförmiger Körper, 1 Band.
VII. Angewandte Mechanik:
Erste Abteilung, Selbständige Werke, 2 Bände.
Zweite Abteilung, Abhandlungen, 2 Bände.

B. Astronomie (5 Bände).

I. Allgemeine Untersuchungen zum Dreikörperproblem, 1 Band.
II. Spezielle Bahnbestimmungen, 3 Bände.
III. Sphärische Astronomie; Parallaxe; Astrophysik, 1 Bd.

Dritte Reihe: Physik; Werke verschiedenen Inhalts; Briefwechsel.

A. Physik (4 Bände).

I. Akustik; Wärme; Licht; Magnetismus, 1 Band.
II. Optische Instrumente, 3 Bände.

B. Werke verschiedenen Inhalts (2 Bände).

I. Briefe an eine deutsche Prinzessin, 1 Band.
II. Sonstige Veröffentlichungen verschiedenen Inhalts, 1 Band.

C. Briefwechsel (3 Bände).

Briefwechsel mit d'Alembert, Daniel Bernoulli, Johann Bernoulli, Nicolaus Bernoulli, Goldbach, Lagrange usw.

Die Schweizer Naturforschende Gesellschaft hat die Vorarbeiten zu dem großen Werke, für das ein wesentlicher Teil der erforderlichen Mittel im Subskriptionswege beschafft worden ist, beendet. Mit dem Verlag des großen Unternehmens ist die Firma B. G. Teubner in Leipzig betraut.

Personalien.

(Die Herausgeber bitten die Herren Fachgenossen, der Redaktion von eintretenden Änderungen möglichst bald Mitteilung zu machen.)

Habilitiert: An der Technischen Hochschule München für Astrophysik Dr. O. von und zu Aufseß.

Ernannt: Der Privatdozent an der Hochschule für Bodenkultur in Wien Dr. Emil Hellebrand zum a. o. Professor für darstellende Geometrie und niedere Geodäsie an dieser Hochschule, Dr. Walter Knoche in Berlin zum Direktor des neugegründeten Meteorologischen und Physikalischen Zentralinstituts in Santiago (Chile), der Privatdozent an der Technischen Hochschule in München Dr. Heinz Egerer zum Professor für Mechanik an der Technischen Hochschule in Drontheim.

Verliehen: Dem Privatdozenten für medizinische Chemie an der Universität Wien Dr. Siegmund Fränkel der Titel Professor, dem ord. Professor der Physik an der Universität Wien Dr. Franz Exner der Titel und Charakter eines k. k. Hofrates.

Gestorben: Der frühere Präsident der American Chemical Society Dr. Ch. B. Dudley in Neuyork, der Professor der Physik an der Universität Paris H. Pellat.

Aus der Adolf Salomonsohnstiftung, welche den Zweck hat, **„Beihilfen zu gewähren behufs Förderung wichtiger Arbeiten auf den Gebieten der Naturwissenschaften (einschließlich Biologie und Medizin) durch hervorragend tüchtige Kräfte, denen für die längere Dauer der Forschungen genügende Mittel nicht zur Verfügung stehen"** sind stiftungsgemäß bis zu 2300 Mark zur Verwendung verfügbar.

Bewerbungen sind bis zum 1. März 1910 schriftlich an den Wirklichen Geheimen Ober-Regierungsrat Dr. Schmidt in Berlin, Unter den Linden 4, mit der Aufschrift Adolf Salomonsohn-Stiftungssache zu richten.

Für die Redaktion verantwortlich Professor Dr. Friedrich Krüger in Danzig-Langfuhr. — Verlag von S. Hirzel in Leipzig.
Druck von August Pries in Leipzig.